

Capítulo 2

Valores medio y eficaz

FORMAS DE ONDA

Las representaciones de las funciones $v(t)$, $i(t)$, $p(t)$, etc., se llaman formas de onda de tensión, intensidad de corriente, potencia eléctrica, etc., respectivamente. En el análisis de circuitos preliminar solo estudiaremos las funciones periódicas, es decir, aquellas en las que $f(t) = f(t + nT)$, siendo n un número entero y T el periodo que se muestra en la Fig. 2-1. Para ver la forma de onda de una función periódica debe representarse, al menos, un periodo.

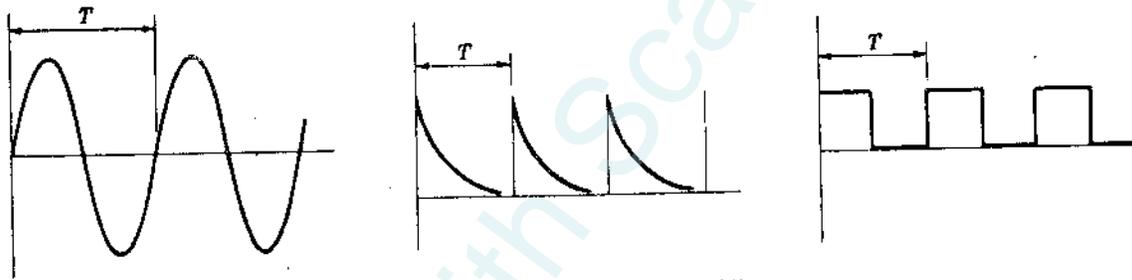


Fig. 2-1. Formas de onda periódicas

Las funciones de tensión e intensidad, $v(t)$ e $i(t)$, son expresiones matemáticas que se pueden dar de varias maneras, según los casos. Por ejemplo, las funciones seno y coseno se pueden expresar mediante series potenciales infinitas. Sin embargo, sería muy penoso aplicar estas formas matemáticas a las ecuaciones básicas relativas a la tensión e intensidad en los tres elementos fundamentales de los circuitos.

VALOR MEDIO

El valor medio Y_{med} de una función periódica $y(t)$ de periodo T es, por definición,

$$Y_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

VALOR EFICAZ

Al circular una corriente de intensidad $i(t)$ por un elemento resistivo puro de resistencia R , éste disipa una potencia $p(t)$ con un valor medio P . Pues bien, esta misma potencia P la puede disipar una corriente constante de intensidad I circulando por dicha R . En estas condiciones, diremos que $i(t)$ tiene un valor eficaz I_{ef} equivalente a la corriente constante I . Lo mismo diríamos respecto de la tensión eficaz V_{ef} . Matemáticamente, dada la función $y(t)$ de periodo T , su valor eficaz — o raíz cuadrática media — es, por definición,

$$Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y(t)^2 dt}$$

El valor eficaz de las funciones $a \sin \omega t$ y $a \cos \omega t$ durante un periodo es $a/\sqrt{2}$. (Véase Problema 2-2.)

VALOR EFICAZ DE UNA FUNCIÓN DE SENOS Y COSENOS

El valor eficaz de la función $y(t) = a_0 + (a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots) + (b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots)$ viene dado por

$$Y_{ef} = \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + \dots) + \frac{1}{2}(b_1^2 + b_2^2 + \dots)}$$

Llamando A al valor eficaz de la función $a_1 \cos \omega t$, según lo dicho en la sección anterior, $A_1 = \frac{a_1}{\sqrt{2}}$ o bien

$$A_1^2 = \frac{a_1^2}{2}, \text{ por tanto}$$

$$Y_{ef} = \sqrt{a_0^2 + (A_1^2 + A_2^2 + \dots) + (B_1^2 + B_2^2 + \dots)}$$

FACTOR DE FORMA

El factor de forma de una onda es la relación entre los valores eficaz y medio de la misma.

$$\text{Factor de forma} = \frac{Y_{ef}}{Y_{med}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y(t)^2 dt}}{\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt}$$

Las formas de onda tales que $f(t) = -f(t + \frac{1}{2}T)$, es decir, aquellas ondas cuyos semiperiodos son simétricos con respecto al eje de tiempos, tienen un valor medio igual a cero, como puede observarse en la Fig. 2-2. Para salvar la dificultad en este tipo de ondas, de las que la función seno es el ejemplo más característico, se suele tomar el valor medio Y_{med} del semiperiodo positivo. Este valor se llama a veces valor medio de un semiciclo.

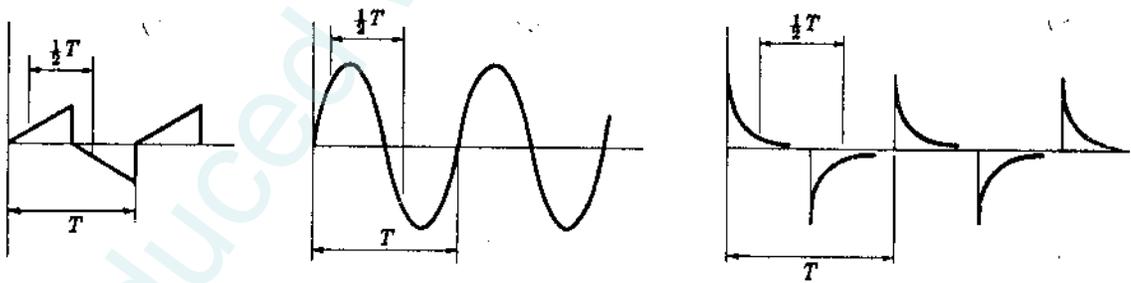


Fig. 2-2. Ondas de semiperiodo simétrico

Existen, sin embargo, otras formas de onda cuyo valor medio en un periodo es nulo y que no presentan aquella simetría, como las representadas en la Fig. 2-3. El cálculo del valor Y_{med} para obtener el factor de forma también se realiza en un semiperiodo, análogamente a como dijimos para las anteriores.

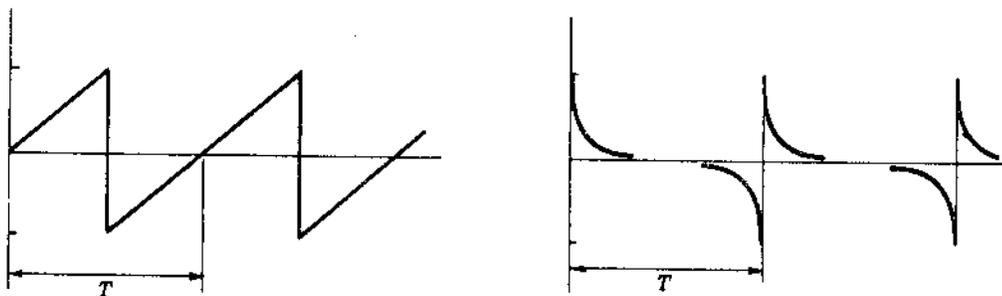


Fig. 2-3

Problemas resueltos

2-1 Por una resistencia circular (a) una corriente de intensidad constante I , (b) una corriente periódica $i(t)$ de periodo T . (Véase Fig. 2-4.) Demostrar que si $I_{ef} = I$, la potencia media P es la misma en ambos casos.

Corriente constante I : $P = VI = RI^2$

Corriente periódica $i(t)$: $p = vi = Ri^2$ y $P = \left(\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt\right) R = RI_{ef}^2$

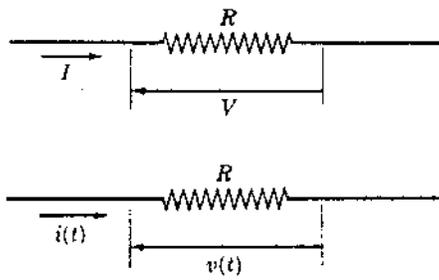


Fig. 2-4

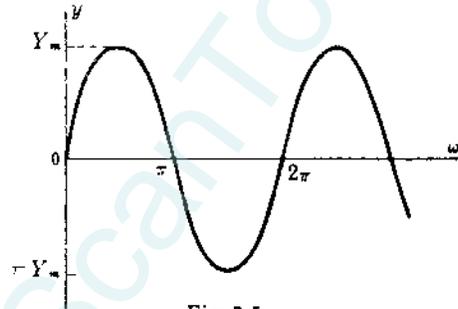


Fig. 2-5

2-2 Hallar los valores medio y eficaz de la función $y(t) = Y_m \text{sen } \omega t$.

El periodo de la función es 2π . La gráfica se representa con ωt como variable independiente (Figura 2-5).

$$Y_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y_m \text{sen } \omega t d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} Y_m \left[-\cos \omega t \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Y_m \text{sen } \omega t)^2 d(\omega t)} = \frac{Y_m}{\sqrt{2}} = 0,707 Y_m$$

El valor eficaz de una función pura senoidal o cosenoidal es $1/\sqrt{2}$ o bien 0,707 veces el valor máximo.

2-3 Hallar la potencia media P disipada en una resistencia de 10 ohmios por la que circula una corriente $i(t) = 14,14 \cos \omega t$ amperios.

Como $p = vi = Ri^2 = 2000 \cos^2 \omega t$ y su periodo es π , la potencia media vale

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2000 \cos^2 \omega t d(\omega t) = 1000 \text{ W}$$

Otro método. La potencia media disipada por una resistencia pura por la que circula una corriente periódica es

$$P = RI_{ef}^2 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (14,14 \cos \omega t)^2 d(\omega t) \right\} 10 = (14,14/\sqrt{2})^2 (10) = 1000 \text{ W}$$

2-4 Hallar los valores medio y eficaz de la forma de onda en diente de sierra representada en la Figura 2-6.

Evidentemente, $Y_{med} = 25$. En el intervalo $0 < t < 2$, $y = 25t$; por tanto,

$$Y_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T y^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^2 625t^2 dt = 834, \text{ de donde } Y_{ef} = 28,9$$

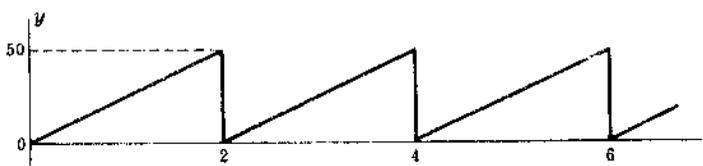


Fig. 2-6

2-5 Hallar los valores medio y eficaz de la forma de onda representada en la Fig. 2-7 en cuyo primer intervalo $y = 10e^{-200t}$.

$$Y_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T y dt = \frac{1}{0,05} \int_0^{0,05} 10 e^{-200t} dt = \frac{10}{0,05(-200)} \left[e^{-200t} \right]_0^{0,05}$$

$$= -1[e^{-10} - e^0] = 1,00$$

$$Y_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T y^2 dt = \frac{1}{0,05} \int_0^{0,05} 100 e^{-400t} dt = 5,00, \text{ de donde } Y_{ef} = 2,24$$

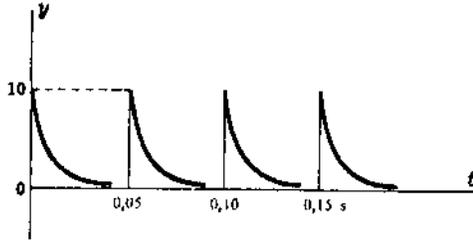


Fig. 2-7

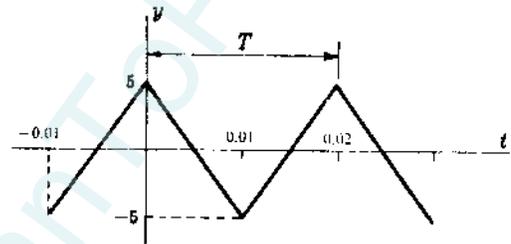


Fig. 2-8

2-6 Hallar el factor de forma de la onda triangular representada en la Figura 2-8.

$$-0,01 < t < 0: y(t) = 1000t + 5; \quad \frac{y(t)^2}{t^2} = 10^6 t^2 + 10^4 t + 25$$

$$0 < t < 0,01: y(t) = -1000t + 5; \quad \frac{y(t)^2}{t^2} = 10^6 t^2 - 10^4 t + 25$$

$$Y_{ef}^2 = \frac{1}{0,02} \left\{ \int_{-0,01}^0 (10^6 t^2 + 10^4 t + 25) dt + \int_0^{0,01} (10^6 t^2 - 10^4 t + 25) dt \right\} = 8,33, \quad Y_{ef} = 2,89$$

Como la onda es simétrica, su valor medio se calcula sobre la parte positiva, es decir,

$$Y_{med} = \frac{1}{0,01} \left\{ \int_{-0,005}^0 (1000t + 5) dt + \int_0^{0,005} (-1000t + 5) dt \right\} = 2,5$$

$$\text{Factor de forma} = \frac{Y_{ef}}{Y_{med}} = \frac{2,89}{2,5} = 1,16$$

2-7 Hallar los valores medio y eficaz de la forma de onda senoidal representada en la Figura 2-9.

Para $0 < \omega t < \pi$, $y = Y_m \text{ sen } \omega t$; para $\pi < \omega t < 2\pi$, $y = 0$. El periodo es 2π .

$$Y_{med} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^\pi Y_m \text{ sen } \omega t d(\omega t) + \int_\pi^{2\pi} 0 d(\omega t) \right\} = 0,318 Y_m$$

$$Y_{ef}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (Y_m \text{ sen } \omega t)^2 d(\omega t) = \frac{1}{2} Y_m^2, \quad Y_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_m$$

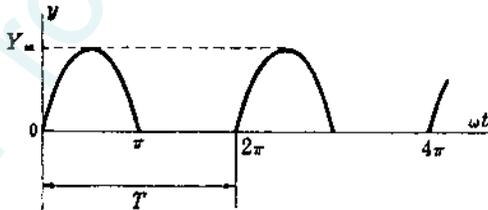


Fig. 2-9

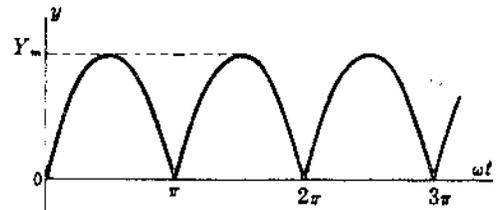


Fig. 2-10

2-8 Hallar los valores medio y eficaz de la onda completa senoidal rectificada de la Fig. 2-10. El periodo es π .

$$Y_{med} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Y_m \text{ sen } \omega t d(\omega t) = 0,637 Y_m$$

$$Y_{ef}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (Y_m \text{ sen } \omega t)^2 d(\omega t) = \frac{Y_m^2}{2}, \quad Y_{ef} = 0,707 Y_m$$

2-9 Hallar los valores medio y eficaz de la onda cuadrada representada en la Figura 2-11.

Para $0 < t < 0,01$, $y = 10$; para $0,01 < t < 0,03$, $y = 0$. El periodo es 0,03 s.

$$Y_{\text{med}} = \frac{1}{0,03} \int_0^{0,01} 10 dt = \frac{10(0,01)}{0,03} = 3,33$$

$$Y_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{0,03} \int_0^{0,01} 10^2 dt = 33,3, \quad Y_{\text{ef}} = 5,77$$

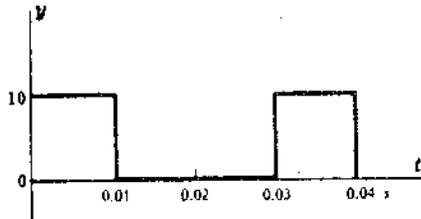


Fig. 2-11

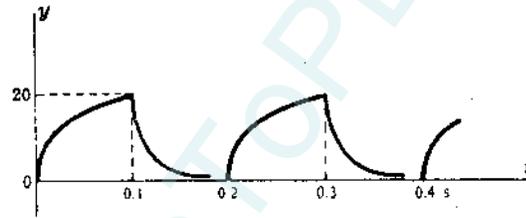


Fig. 2-12

2-10 Hallar el valor eficaz de la función representada en la Fig. 2-12 definida por:

$$0 < t < 0,1 \quad y = 20(1 - e^{-100t}); \quad 0,1 < t < 0,2 \quad y = 20e^{-50(t-0,1)}$$

$$Y_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{0,2} \left\{ \int_0^{0,1} 400(1 - 2e^{-100t} + e^{-200t}) dt + \int_{0,1}^{0,2} 400 e^{-100(t-0,1)} dt \right\}$$

$$= 2000 \left\{ \left[t + 0,02 e^{-100t} - 0,005 e^{-200t} \right]_0^{0,1} + \left[-0,01 e^{-100(t-0,1)} \right]_{0,1}^{0,2} \right\}$$

$$= 190, \quad \text{de donde } Y_{\text{ef}} = 13,78. \quad (\text{El término en } e^{-10} \text{ y en } e^{-20} \text{ no son significativos.})$$

2-11 Hallar el valor eficaz de la función $y = 50 + 30 \text{ sen } \omega t$.

$$Y_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2500 + 3000 \text{ sen } \omega t + 900 \text{ sen}^2 \omega t) d(\omega t)$$

$$= \frac{1}{2\pi} [2500(2\pi) + 0 + 900\pi] = 2950, \quad Y_{\text{ef}} = 54,3$$

Otro método: $Y_{\text{ef}} = \sqrt{(50)^2 + \frac{1}{2}(30)^2} = \sqrt{2950} = 54,3$

2-12 Hallar el valor eficaz de la función de tensión $v = 50 + 141,4 \text{ sen } \omega t + 35,5 \text{ sen } 3\omega t$.

$$V_{\text{ef}} = \sqrt{(50)^2 + \frac{1}{2}(141,4)^2 + \frac{1}{2}(35,5)^2} = 114,6 \text{ V}$$

2-13 Una onda completa senoidal rectificada está cortada a 0,707 de su valor máximo, como indica la Fig. 2-13. Hallar los valores medio y eficaz de dicha función.

La función tiene de periodo π y está definida por

$$\begin{aligned} 0 < \omega t < \pi/4 & \quad y = Y_m \text{ sen } \omega t \\ \pi/4 < \omega t < 3\pi/4 & \quad y = 0,707 Y_m \\ 3\pi/4 < \omega t < \pi & \quad y = Y_m \text{ sen } \omega t \end{aligned}$$

$$Y_{\text{med}} = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/4} Y_m \text{ sen } \omega t d(\omega t) + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 0,707 Y_m d(\omega t) + \int_{3\pi/4}^{\pi} Y_m \text{ sen } \omega t d(\omega t) \right\} = 0,54 Y_m$$

$$Y_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/4} (Y_m \text{ sen } \omega t)^2 d(\omega t) + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (0,707 Y_m)^2 d(\omega t) + \int_{3\pi/4}^{\pi} (Y_m \text{ sen } \omega t)^2 d(\omega t) \right\}$$

$$= 0,341 Y_m^2 \quad Y_{\text{ef}} = 0,584 Y_m$$

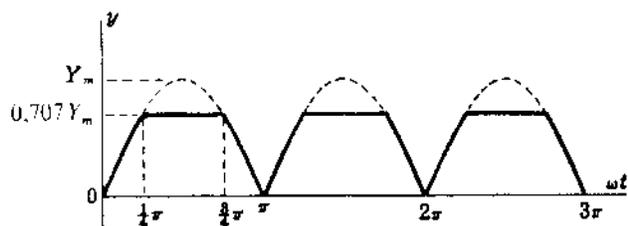


Fig. 2-13

2-14 Hallar el ángulo de fase θ que debe tener la onda completa senoidal rectificada de la Figura 2-14 para que su valor medio sea la mitad de su valor máximo.

$$Y_{med} = \frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} Y_m \sin \omega t \, d(\omega t)$$

$$= \frac{Y_m}{\pi} (-\cos \pi + \cos \theta)$$

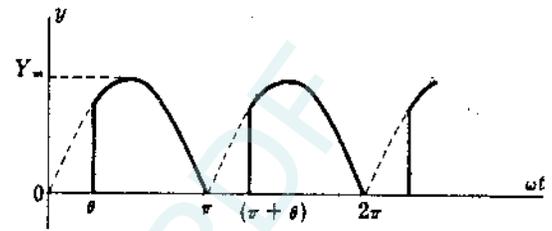


Fig. 2-14

Por tanto, $0,5 Y_m = (Y_m/\pi)(1 + \cos \theta)$, $\cos \theta = 0,57$, $\theta = 55,25^\circ$.

2-15 La intensidad de corriente que circula por una resistencia de 2 ohmios tiene la forma de onda del Problema 2-14 con un valor máximo de 5 amperios. La potencia media disipada por la resistencia es de 20 vatios. Hallar el ángulo θ .

$P = RI_{ef}^2$, $20 = (2)I_{ef}^2$, $I_{ef}^2 = 10$. Por tanto,

$$I_{ef}^2 = 10 = \frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} (5 \sin \omega t)^2 \, d(\omega t) = \frac{25}{\pi} \left[\frac{\omega t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4} \right]_{\theta}^{\pi} = \frac{25}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi}{4} - \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right)$$

de donde $\sin 2\theta = 20 - 10\pi/25$ y $\theta = 60,5^\circ$ (solución gráfica).

Problemas propuestos

- 2-16** La potencia media disipada en una resistencia de 25 ohmios es de 400 vatios. Hallar el valor máximo de la intensidad de corriente si ésta es (a) senoidal, (b) triangular. *Sol.* (a) 5,66 A. (b) 6,93 A.
- 2-17** Hallar el valor eficaz V_{ef} de la tensión $v(t) = 100 + 25 \sin 3\omega t + 10 \sin 5\omega t$. *Sol.* 101,8 V.
- 2-18** Hallar la potencia media disipada en una resistencia de 25 ohmios cuando por ella circula una corriente $i(t) = 2 + 3 \sin \omega t + 2 \sin 2\omega t + 1 \sin 3\omega t$. *Sol.* 275 W.
- 2-19** Hallar el valor de Y_{ef} de la función $y(t) = 50 + 40 \sin \omega t$. *Sol.* 57,4.
- 2-20** Hallar el valor de Y_{ef} de la función $y(t) = 150 + 50 \sin \omega t + 25 \sin 2\omega t$. *Sol.* 155,3.
- 2-21** Sabiendo que el valor eficaz de la función $y(t) = 100 + A \sin \omega t$ es 103,1, hallar la amplitud A del término senoidal. *Sol.* 35,5.
- 2-22** Una cierta función consta de un término constante, un armónico fundamental y un tercer armónico. El valor máximo del fundamental es el 80 % y el valor máximo del tercer armónico es el 50 % del término constante. Sabiendo que el valor eficaz de esta función es 180,3, hallar el término constante y los dos armónicos. *Sol.* 150, 120, 75.

2-23 Si el valor eficaz de media onda senoidal rectificada es 20, ¿cuál es su valor medio? *Sol.* 12,7.

2-24 Hallar Y_{med} e Y_{ef} de la forma de onda representada en la Fig. 2-15. *Sol.* $Y_{med} = 40$; $Y_{ef} = 72,1$.

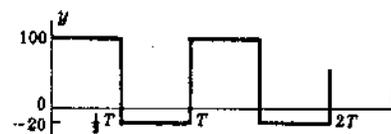


Fig. 2-15

2-25 Hallar Y_{med} e Y_{ef} de la forma de onda representada en la Figura 2-16. Sol. $Y_{med} = 10$; $Y_{ef} = 52,9$.

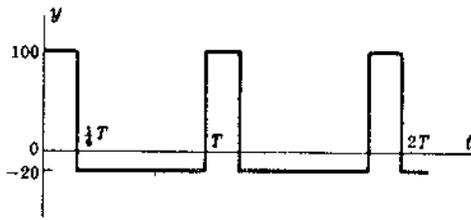


Fig. 2-16

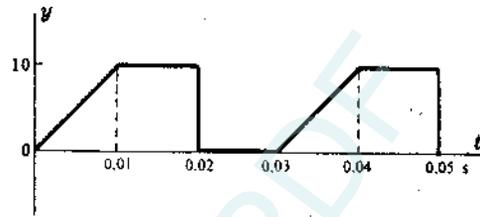


Fig. 2-17

2-26 Hallar Y_{ef} de la forma de onda representada en la Figura 2-17. Sol. $Y_{ef} = 6,67$.

2-27 Hallar Y_{ef} de la forma de onda representada en la Figura 2-18. Sol. $Y_{ef} = Y_m/\sqrt{3} = 0,577Y_m$.

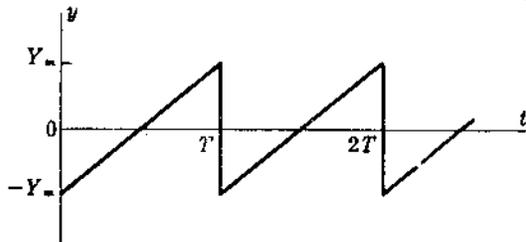


Fig. 2-18

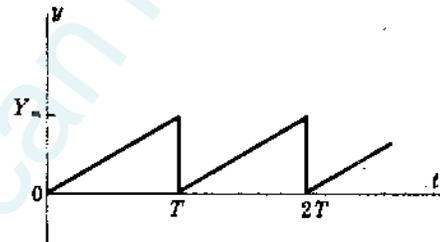


Fig. 2-19

2-28 Hallar el valor eficaz de la forma de onda representada en la Fig. 2-19 y compararlo con el del Problema 2-27.

2-29 Hallar el valor eficaz de la onda triangular representada en la Fig. 2-20 y compararlo con el del Problema 2-27.

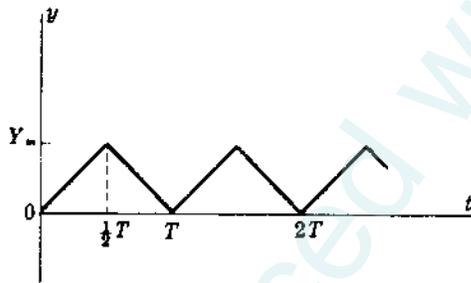


Fig. 2-20

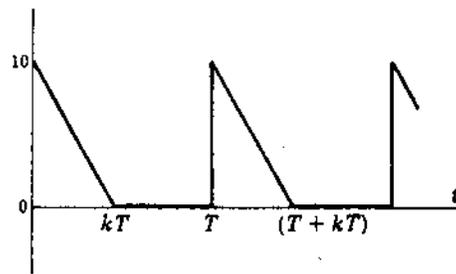


Fig. 2-21

2-30 Hallar el valor de k en la forma de onda representada en la Fig. 2-21 sabiendo que es una fracción del periodo T tal que el valor eficaz es (a) 2, (b) 5. ¿Cuál será el máximo valor eficaz de la forma de onda dada al variar k ? Sol. (a) 0,12; (b) 0,75; 5,77 para $k = 1$.

2-31 Hallar los valores V_{med} y V_{ef} de la forma de onda de la Figura 2-22. Sol. $V_{med} = 21,6$; $V_{ef} = 24,75$

2-32 En el Problema 2-31 determinar los valores V_{med} y V_{ef} si la función se define en el primer intervalo por (a) $50e^{-200t}$, (b) $50e^{-500t}$. Sol. (a) $V_{med} = 12,25$, $V_{ef} = 17,67$; (b) $V_{med} = 5,0$, $V_{ef} = 11,18$.

2-33 Hallar los valores Y_{med} e Y_{ef} correspondientes a la forma de onda de la Fig. 2-23 definida por

$$0 < t < 0,025 \quad y(t) = 400t$$

$$0,025 < t < 0,050 \quad y(t) = 10e^{-1000(t-0,025)}$$

Sol. $Y_{med} = 2,7$, $Y_{ef} = 4,2$

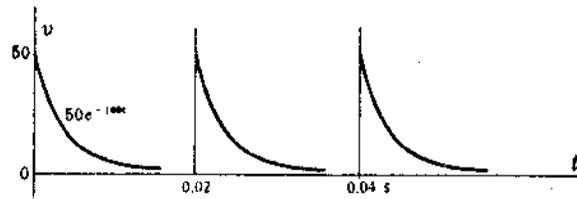


Fig. 2-22

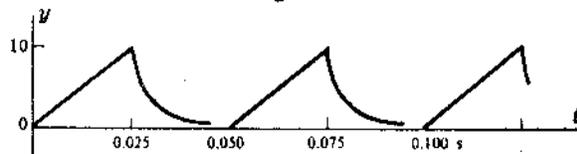


Fig. 2-23

- 2-34 La forma de onda de la Fig. 2-24 es análoga a la del Problema 2-33, pero con un tiempo de elevación más pequeño. Hallar los valores Y_{med} e Y_{ef} .

$$0 < t < 0,01 \quad y(t) = 1000t$$

$$0,01 < t < 0,05 \quad y(t) = 10e^{-1000(t-0,01)}$$

Sol. $Y_{med} = 1,2$; $Y_{ef} = 2,77$.

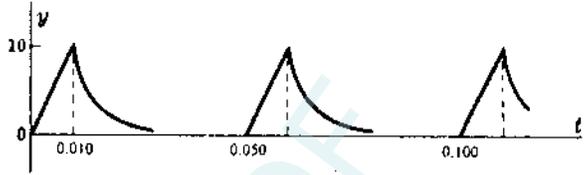


Fig. 2-24

- 2-35 Hallar los valores V_{med} y V_{ef} de la media onda senoidal de tensión rectificadora de la Fig. 2-25, sabiendo que el ángulo de fase es de 45° en retraso.

Sol. $V_{med} = 27,2$ V; $V_{ef} = 47,7$ V.

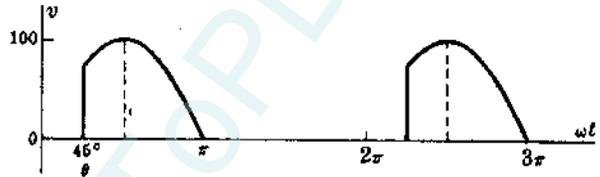


Fig. 2-25

- 2-36 Hallar los valores V_{med} y V_{ef} de la forma de onda del Problema 2-35 si el ángulo de fase es (a) $\theta = 90^\circ$, (b) $\theta = 135^\circ$.

Sol. (a) $V_{med} = 15,95$; $V_{ef} = 35,4$.

(b) $V_{med} = 4,66$; $V_{ef} = 15,06$.

- 2-37 La onda completa senoidal rectificadora de la Fig. 2-26 tiene un ángulo de fase en retraso de 60° . Hallar los valores V_{med} y V_{ef} en función de V_m . Sol. $V_{med} = 0,478 V_m$; $V_{ef} = 0,633 V_m$.

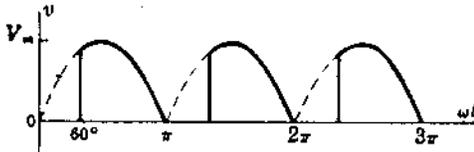


Fig. 2-26

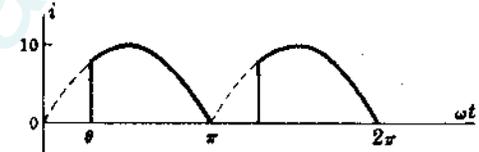


Fig. 2-27

- 2-38 Un circuito de mando permite variar el ángulo de retraso de la forma de onda de intensidad de corriente de la Fig. 2-27, de manera que el valor eficaz tiene como límites inferior y superior 2,13 y 7,01 amperios, respectivamente. Hallar los ángulos correspondientes. Sol. $\theta_1 = 135^\circ$; $\theta_2 = 25^\circ$.

- 2-39 Hallar el valor eficaz de una onda completa senoidal rectificadora cortada en la mitad de su valor máximo como indica la Figura 2-28. Sol. $Y_{ef} = 0,442 Y_m$.

- 2-40 Hallar el valor eficaz de la forma de onda del Problema 2-39 si la onda se corta en 60° o bien $\pi/3$ radianes. Sol. $Y_{ef} = 0,668 Y_m$.

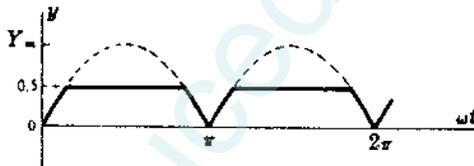


Fig. 2-28

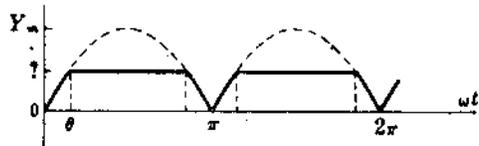


Fig. 2-29

- 2-41 Una onda completa senoidal rectificadora está cortada de forma que su valor eficaz es $0,5 Y_m$, como indica la Figura 2-29. Hallar la amplitud en la que se corta la onda. Sol. $0,581 Y_m$ o bien $\theta = 35,5^\circ$.

- 2-42 Hallar los valores medio y eficaz de la forma de onda obtenida de un circuito rectificador de media onda a tres fases como se indica en la Figura 2-30. Sol. $V_{med} = 0,827 V_m$; $V_{ef} = 0,840 V_m$.

- 2-43 La forma de onda resultante de un circuito rectificador de media onda a seis fases es la representada en la Figura 2-31. Hallar los valores V_{med} y V_{ef} . Sol. $V_{med} = 0,955 V_m$; $V_{ef} = 0,956 V_m$.

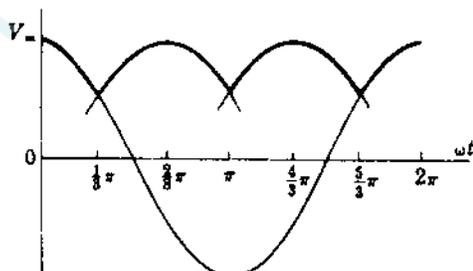


Fig. 2-30

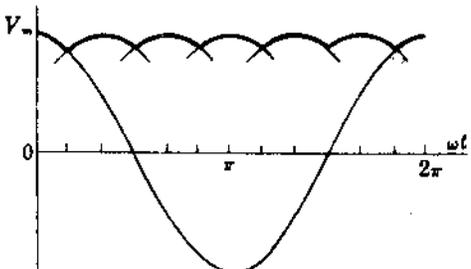


Fig. 2-31