Capítulo 4

Números complejos

NUMEROS REALES

El *cuerpo de los números reales* se compone de los correspondientes a los números racionales e irracionales. El conjunto de los números reales se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los puntos de una recta que se llama *eje real*; es decir, cada punto de la recta representa un único número real y cualquier número real se representa por un único punto de la recta, como muestra la Fig. 4-1. La suma, resta, multiplicación y división de dos números reales es otro número real. La raíz cuadrada de un número real positivo es también otro número real; pero si es negativo, su raíz cuadrada no es un número real o bien no corresponde a ningún punto de la citada recta.

Fig. 4-1. Eje real

NUMEROS IMAGINARIOS

La raíz cuadrada de un número real negativo es un *número imaginario*; por ejemplo, son números imaginarios $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-16}$, etc.

Si hacemos $j = \sqrt{-1}$, que se llama *unidad imaginaria*, se puede escribir, $\sqrt{-2} = j\sqrt{2}$, $\sqrt{-4} = j2$, $\sqrt{-5} = j\sqrt{5}$, $\sqrt{-16} = j4$, etc. Las sucesivas potencias de la unidad imaginaria son

$$j^2 = -1, \qquad j^3 = j^2 \cdot j = (-1)j = -j, \qquad j^4 = (j^2)^2 = 1, \qquad j^5 = j, \qquad \ldots$$

El conjunto de los números imaginarios se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los puntos de otra recta, que se llama *eje imaginario*, como muestra la Figura 4-2.

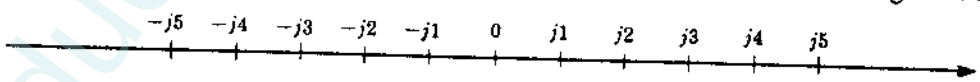


Fig. 4-2. Eje imaginario

La elección de la palabra imaginario es muy desafortunada, pues estos números tienen tanta existencia física como los reales. El vocablo significa, exclusivamente, que los números imaginarios no se pueden representar por un punto en el eje de los números reales.

NUMEROS COMPLEJOS

Un número complejo **z** es de la forma $x + jy$, en donde x e y son números reales y $j = \sqrt{-1}$. En un número complejo $x + jy$ la primera componente, x, se llama parte real y la segunda, jy, parte imaginaria. Si la parte real es nula, $x = 0$, el número complejo se reduce a un número imaginario (puro) y se representa por un punto sobre el eje imaginario. Análogamente, si la que es nula es la parte imaginaria, $y = 0$, el número complejo se reduce a un número real y se representa por un punto del eje real. Por consiguiente, el conjunto de los números reales tiene como subconjuntos al de los números reales y al de los imaginarios.

La condición necesaria y suficiente para que dos números complejos, $a + jb$ y $c + jd$, sean iguales es que $a = c$ y $b = d$.

Si se traza el eje real perpendicular al eje imaginario, como se representa en la Fig. 4-3, siendo 0 el punto de intersección llamado origen, el conjunto de los números complejos se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de puntos del plano complejo así formado. En dicha Fig. 4-3, se han situado los seis números complejos ($\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_6$) que aparecen a su izquierda.

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= 6 \\ \mathbf{z}_2 &= 2 - j3 \\ \mathbf{z}_3 &= j4 \\ \mathbf{z}_4 &= -3 + j2 \\ \mathbf{z}_5 &= -4 - j4 \\ \mathbf{z}_6 &= 3 + j3 \end{aligned}$$

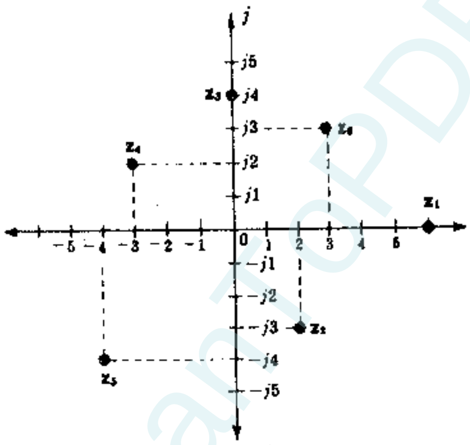


Fig. 4-3

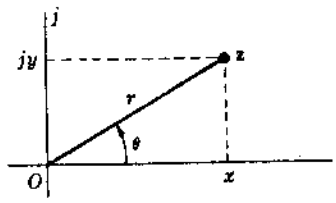
DISTINTAS FORMAS DE EXPRESAR UN NUMERO COMPLEJO

En la Fig. 4-4, $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, con lo que el número complejo $\mathbf{z}$ es

$$\mathbf{z} = x + jy = r(\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta)$$

en donde la expresión $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ se llama *módulo* de $\mathbf{z}$, y el ángulo $\theta = \operatorname{arc\,tg} y/x$ recibe el nombre de *argumento* de $\mathbf{z}$.

La fórmula de Euler, $e^{j\theta} = (\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta)$, permite expresar en otra forma, que se llama exponencial, un número complejo (véase Problema 4-1).



Representación polar de un número complejo $\mathbf{z}$

Fig. 4-4

$$\mathbf{z} = r \cos \theta + jr \operatorname{sen} \theta = r e^{j\theta}$$

En teoría de circuitos es muy frecuente emplear la forma polar o de Steinmetz de un número complejo $\mathbf{z}$ y se suele escribir así:

$$r\underline{/\theta}$$

en donde θ se mide en grados o en radianes.

A continuación se resumen las cuatro formas de representar un número complejo; el empleo de una u otra depende, fundamentalmente, de la operación que se trate de efectuar.

Forma binómica	$\mathbf{z} = x + jy$
Forma polar o de Steinmetz	$\mathbf{z} = r\underline{/\theta}$
Forma exponencial	$\mathbf{z} = r e^{j\theta}$
Forma trigonométrica	$\mathbf{z} = r(\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta)$

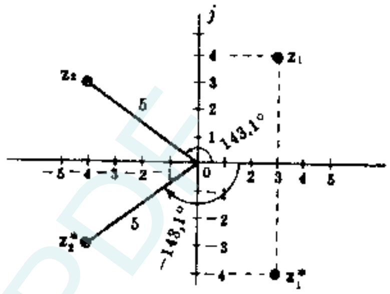
CONJUGADO DE UN NUMERO COMPLEJO

El conjugado del número complejo $\mathbf{z} = x + jy$ es el complejo $\mathbf{z}^* = x - jy$. Por ejemplo, son números complejos conjugados los pares: (*1*) $3 - j2$ y $3 + j2$, (*2*) $-5 + j4$ y $-5 - j4$.

En forma polar, el conjunto de $\mathbf{z} = r\underline{/\theta}$ es $\mathbf{z}^* = r\underline{/-\theta}$. Como $\cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$, el conjugado de $\mathbf{z} = r(\cos\theta + j\operatorname{sen}\theta)$ es $\mathbf{z}^* = r(\cos\theta - j\operatorname{sen}\theta)$. Por ejemplo, el conjugado de $\mathbf{z} = 7\underline{/30^\circ}$ es $\mathbf{z}^* = 7\underline{/-30^\circ}$.

En el plano complejo, el conjugado $\mathbf{z}^*$ de un número complejo $\mathbf{z}$ es siempre el simétrico de $\mathbf{z}$ respecto del eje real, como se muestra en la Figura 4-5.

Por consiguiente, las cuatro formas de escribir un número complejo $\mathbf{z}$ y su conjugado correspondiente son:



$z_1 = 3 + j4, \quad z_1^* = 3 - j4$
$z_2 = 5\underline{/143.1^\circ}, \quad z_2^* = 5\underline{/-143,1^\circ}$

Fig. 4-5. Números complejos y sus conjugados

$$\begin{array}{llll} \mathbf{z} = x + jy & \mathbf{z} = r\underline{/\theta} & \mathbf{z} = r\,e^{j\theta} & \mathbf{z} = r(\cos\theta + j\operatorname{sen}\theta) \\ \mathbf{z}^* = x - jy & \mathbf{z}^* = r\underline{/-\theta} & \mathbf{z}^* = r\,e^{-j\theta} & \mathbf{z}^* = r(\cos\theta - j\operatorname{sen}\theta) \end{array}$$

SUMA Y RESTA DE NUMEROS COMPLEJOS

Para sumar (restar) dos números complejos se suman (restan) sus partes reales y sus partes imaginarias independientemente. En la práctica, para sumar (restar) complejos lo más cómodo es escribirlos en forma binómica.

Ejemplo 1. Sean los complejos $\mathbf{z}_1 = 5 - j2$ y $\mathbf{z}_2 = -3 - j8$. Entonces,

$$\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 = (5-3) + j(-2-8) = 2 - j10$$
$$\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 = (-3-5) + j(-8+2) = -8 - j6$$

MULTIPLICACION DE NUMEROS COMPLEJOS

El producto de dos números complejos, escritos en forma exponencial, se deduce inmediatamente de las propiedades de la potenciación.

$$\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (r_1 e^{j\theta_1})(r_2 e^{j\theta_2}) = r_1 r_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

Si los complejos se escriben en forma polar es evidente que

$$\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (r_1\underline{/\theta_1})(r_2\underline{/\theta_2}) = r_1 r_2\underline{/\theta_1+\theta_2}$$

Por último, si los complejos vienen dados en forma binómica se multiplican como si fueran polinomios.

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 &= (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = x_1x_2 + jx_1y_2 + jy_1x_2 + j^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + y_1x_2) \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Si $\mathbf{z}_1 = 5e^{j\pi/3}$ y $\mathbf{z}_2 = 2e^{-j\pi/6}$, resulta $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (5e^{j\pi/3})(2e^{-j\pi/6}) = 10e^{j\pi/6}$.

Ejemplo 3. Si $\mathbf{z}_1 = 2\underline{/30^\circ}$ y $\mathbf{z}_2 = 5\underline{/-45^\circ}$, resulta $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (2\underline{/30^\circ})(5\underline{/-45^\circ}) = 10\underline{/-15^\circ}$.

Ejemplo 4. Si $\mathbf{z}_1 = 2 + j3$ y $\mathbf{z}_2 = -1 - j3$, resulta $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (2+j3)(-1-j3) = 7 - j9$.

DIVISION DE NUMEROS COMPLEJOS

El cociente de dos números complejos, escritos en forma exponencial, se deduce inmediatamente de las propiedades de la potenciación.

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$

Si los complejos se escriben en forma polar es evidente que

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{r_1\underline{/\theta_1}}{r_2\underline{/\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\underline{/\theta_1 - \theta_2}$$

Por último, si los complejos vienen dados en forma binómica se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2}\left(\frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2}\right) = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(y_1x_2 - y_2x_1)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Ejemplo 5. Sean $\mathbf{z}_1 = 4e^{j\pi/3}$ y $\mathbf{z}_2 = 2e^{j\pi/6}$; entonces $\dfrac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \dfrac{4e^{j\pi/3}}{2e^{j\pi/6}} = 2e^{j\pi/6}$.

Ejemplo 6. Sean $\mathbf{z}_1 = 8\underline{/-30^\circ}$ y $\mathbf{z}_2 = 2\underline{/-60^\circ}$; entonces $\dfrac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \dfrac{8\underline{/-30^\circ}}{2\underline{/-60^\circ}} = 4\underline{/30^\circ}$.

Ejemplo 7. Sean $\mathbf{z}_1 = 4 - j5$ y $\mathbf{z}_2 = 1 + j2$; entonces $\dfrac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \dfrac{4 - j5}{1 + j2}\left(\dfrac{1 - j2}{1 - j2}\right) = \dfrac{-6 - j13}{5}$.

RAIZ DE UN NUMERO COMPLEJO

Cualquier número complejo dado en la forma $\mathbf{z} = r\,e^{j\theta}$ equivale a escribir $\mathbf{z} = r\,e^{j(\theta + 2\pi n)}$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Análogamente, $\mathbf{z} = r\underline{/\theta}$ es equivalente a $\mathbf{z} = r\underline{/(\theta + n360^\circ)}$. Por consiguiente,

$$\mathbf{z} = r\,e^{j\theta} = r\,e^{j(\theta + 2\pi n)} \qquad \text{y} \qquad \sqrt[k]{\mathbf{z}} = \sqrt[k]{r}\,e^{j(\theta + 2\pi n)/k}$$

$$\mathbf{z} = r\underline{/\theta} = r\underline{/(\theta + n360^\circ)} \qquad \text{y} \qquad \sqrt[k]{\mathbf{z}} = \sqrt[k]{r}\underline{/(\theta + n360^\circ)/k}$$

Dando a k los valores 0, 1, 2, 3, . . ., $(k - 1)$, se deducen las k raíces distintas que posee un número complejo.

Ejemplo 8.

Si $\mathbf{z} = 8\underline{/60^\circ}$, se deduce que $\sqrt[3]{\mathbf{z}} = \sqrt[3]{8}\underline{/(60^\circ + n360^\circ)/3} = 2\underline{/(20^\circ + n120^\circ)}$. Como n se le pueden dar los valores 0, 1 y 2 se obtienen las tres raíces $2\underline{/20^\circ}$, $2\underline{/140^\circ}$ y $2\underline{/260^\circ}$.

Ejemplo 9. Hallar las raíces quintas de la unidad (real).

Como $1 = 1e^{j2\pi n}$, se tiene $\sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{1}\,e^{j2\pi n/5} = 1e^{j2\pi n/5}$. Como n se le pueden dar los valores 0, 1, 2, 3 y 4, las cinco raíces quintas son $1\underline{/0^\circ}$, 1, $1\underline{/72^\circ}$, $1\underline{/144^\circ}$, $1\underline{/216^\circ}$ y $1\underline{/288^\circ}$.

LOGARITMO DE UN NUMERO COMPLEJO

El logaritmo neperiano o natural de un número complejo se halla muy fácilmente si éste se escribe en forma exponencial.

$$\ln \mathbf{z} = \ln r\,e^{j(\theta + 2\pi n)} = \ln r + \ln e^{j(\theta + 2\pi n)} = \ln r + j(\theta + 2\pi n)$$

El resultado que se obtiene, pues, no es único. Se llama valor principal del logaritmo al que corresponde a $n = 0$, y es el que se considera con más frecuencia.

Ejemplo 10. Si $\mathbf{z} = 3e^{j\pi/6}$, se deduce $\ln \mathbf{z} = \ln z\, e^{j\pi/6} = \ln 3 + j\pi/6 = 1{,}099 + j0{,}523$.

EMPLEO DE LA REGLA DE CALCULO EN EL ALGEBRA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

Introducción

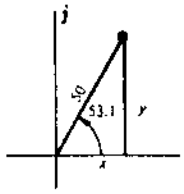
En la notación fasorial que veremos en el Capítulo 5, la tensión, la intensidad de corriente y la impedancia son números complejos. Las formas de expresión más frecuente de estas magnitudes son la binómica y la polar. Es necesario, pues, pasar rápidamente de una a otra forma, ya que lo más cómodo para multiplicar y dividir complejos es escribirlos en forma polar y, en cambio, para sumarlos o restarlos lo mejor es hacerlo en forma binómica.

Para estas conversiones, es muy aconsejable manejar con soltura la regla de cálculo decimal-trigonométrica. Existen diversas reglas de cálculo y recomendamos aprender bien su utilización leyendo el libro de instrucciones que la acompañan.

Como el propósito de esta parte es llegar a una rápida y eficaz conversión en cualquier sentido, las explicaciones trigonométricas se reducen al mínimo.

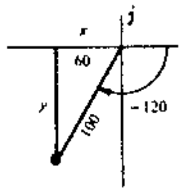
PASO DE FORMA POLAR A BINOMICA

Ejemplo 11. Expresar $50\underline{/53{,}1^\circ}$ en forma binómica, $x + jy$.



1. Se hace un «mono» o dibujo expresando el hecho de que el ángulo es mayor de 45°.
2. $x = 50 \cos 53{,}1^\circ = 50 \times 0{,}600 = 30$,
   $y = 50 \operatorname{sen} 53{,}1^\circ = 50 \times 0{,}800 = 40$.
3. Las partes real e imaginaria son ambas positivas.
4. $50\underline{/53{,}1^\circ} = 30 + j40$.

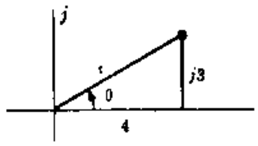
Ejemplo 12. Expresar $100\underline{/-120^\circ}$ en forma binómica, $x + jy$.



1. Se dibuja el «mono» correspondiente. El ángulo de referencia es 60°.
2. $x = 100 \cos 60^\circ = 100 \times 0{,}500 = 50$,
   $y = 100 \operatorname{sen} 60^\circ = 100 \times 0{,}866 = 86{,}6$.
3. Las partes real e imaginaria son ambas negativas.
4. $100\underline{/-120^\circ} = -50 - j86{,}6$.

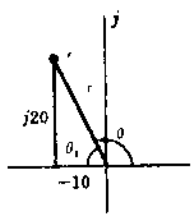
PASO DE FORMA BINOMICA A POLAR

Ejemplo 13. Expresar $4 + j3$ en forma polar, $r\underline{/\theta}$.



1. Se hace un «mono» o dibujo exagerando el hecho de que la parte real es mayor que la parte imaginaria, es decir, el ángulo es *menor* de 45°.
2. $\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{4} = \operatorname{arc\,tg} 0{,}75 = 36{,}9^\circ$ $(<45^\circ)$ sen $36{,}9^\circ = 0{,}600$, de donde $r = \frac{3}{0{,}600} = 5$ o bien $\cos 36{,}9^\circ = 0{,}800$, de donde $r = \frac{4}{0{,}800} = 5$.
3. $4 + j3 = 5\underline{/36{,}9^\circ}$.

Ejemplo 14. Expresar $-10 + j20$ en forma polar, $r\underline{/\theta}$.



1. Se dibuja el «mono» correspondiente. El ángulo de referencia θ_1 es menor de 45° (complementario de θ).
2. $\theta_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{20}{10} = \operatorname{arc\,tg} 2 = 63{,}4^\circ$. Por tanto, $= 180^\circ - 63{,}4^\circ = 116{,}6^\circ$.

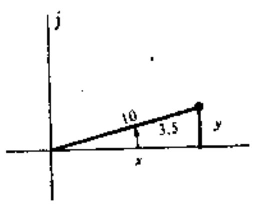
   sen $63{,}4^\circ = 0{,}895$, de donde $r = \frac{20}{0{,}895} = 22{,}4$ o bien $\cos 63{,}4^\circ = 0{,}449$, de donde $r = \frac{10}{0{,}449} = 22{,}4$.
3. $-10 + j20 = 22{,}4\underline{/116{,}6^\circ}$.

OPERACIONES CON ANGULOS MENORES DE SEIS GRADOS

Cuando el valor numérico del ángulo θ de la forma polar de un número complejo es muy pequeño, el módulo r y la parte real x de la forma binómica son aproximadamente iguales. Para $|\theta| \leqq 5{,}73^\circ$, los valores de r y de x se consideran iguales. La parte imaginaria $jy = jr$ sen θ se determina empleando la escala de senos tangentes (ST) de la reglilla en la que se hace la sustitución de los infinitésimos equivalentes: seno, arco y tangente. La misma hipótesis se hace cuando el ángulo θ es próximo a 180°, cuyo ángulo de referencia para los cálculos es menor que 5,73°.

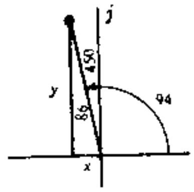
Si el valor numérico de θ es próximo a 90°, el módulo r y el valor de y de la parte imaginaria correspondiente al complejo escrito en forma binómica son aproximadamente iguales. Para $84{,}27^\circ \leqq \theta \leqq 95{,}73^\circ$, los valores de r e y se suponen iguales. La parte real $x = r \cos \theta$ se determina empleando la escala de senos tangentes de la reglilla, teniendo en cuenta que $\cos \theta = \text{sen}\,(90^\circ - \theta)$. Esta misma consideración se hace para valores de θ próximos a 270°, en los que el ángulo de referencia es igual o mayor que 84,27°.

Ejemplo 15. Expresar $10/\underline{3{,}5^\circ}$ en forma binómica, $x + jy$.



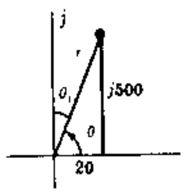
1. Se hace un «mono» o dibujo exagerando el valor del ángulo.
2. Como el ángulo es menor de 5,73°, la parte real $x = 10$.
3. sen $3{,}5^\circ = 0{,}061$, de donde $y = 10 \times 0{,}061 = 0{,}61$.
4. Las partes real e imaginaria son ambas positivas.
5. $10/\underline{3{,}5^\circ} = 10 + j0{,}61$. (Para ángulos muy pequeños, la relación entre las partes real e imaginaria es de 10 a 1.)

Ejemplo 16. Expresar $450/\underline{94^\circ}$ en forma binómica, $x + jy$.



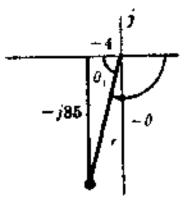
1. Se hace el «mono» correspondiente. El ángulo de referencia es 86°.
2. Como el ángulo de referencia es mayor que 84,27°, la parte imaginaria $y = 450$.
3. $\cos 86^\circ = \text{sen}\ 4^\circ = 0{,}070$, de donde $x = 450 \times 0{,}070 = 31{,}5$.
4. La parte real es negativa y la imaginaria es positiva.
5. $450/\underline{94^\circ} = -31{,}5 + j450$.

Ejemplo 17. Expresar $50 + j500$ en forma polar, $r/\underline{\theta}$



1. Se hace el «mono» correspondiente. La relación de partes imaginaria a real es mayor que 10 a 1, lo cual indica que el ángulo es mayor de 84,27°; por tanto, $r = 500$.
2. $\theta_1 = \text{arc tg}\,\dfrac{20}{500} = \text{arc tg}\ 0{,}04 = 2{,}3^\circ$. Por tanto, $\theta = 90^\circ - 2{,}3^\circ = 87{,}7^\circ$.
3. $50 + j500 = 500/\underline{87{,}7^\circ}$.

Ejemplo 18. Expresar $-4 - j85$ en forma polar, $r/\underline{\theta}$.



1. Se hace el «mono» correspondiente. La relación de partes imaginaria a real es mayor que 10 a 1, lo cual indica que el ángulo es mayor de 84,27°; por tanto, $r = 85$.
2. $\theta_1 = 90^\circ - \text{arc tg}\,\dfrac{4}{85} = 90^\circ - \text{arc tg}\,0{,}047 = 90^\circ - 2{,}7^\circ = 87{,}3^\circ$. Por tanto, $\theta = 87{,}3^\circ \pm 180^\circ = 267{,}3^\circ$ o bien $-92{,}7^\circ$.
3. $-4 - j85 = 85/\underline{267{,}3^\circ} = 85/\underline{-92{,}7^\circ}$.

Problemas

4-1 Demostrar la fórmula de Euler.

Supongamos que una función se puede representar por una serie de potencias de x de tipo Maclaurin:

$$f(x) \;=\; f(0) + x\,f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots + \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \cdots$$

siendo continuas, en $x = 0$, la función y todas sus derivadas.

Los desarrollos de Maclaurin de $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$ y $e^{j\theta}$ en potencias de θ son:

$$\cos\theta \;=\; 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \qquad \operatorname{sen}\theta \;=\; \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

$$e^{j\theta} \;=\; 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + j\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - j\frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

Agrupando términos en la serie correspondiente a $e^{j\theta}$ tendremos,

$$e^{j\theta} \;=\; \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + j\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) \;=\; \cos\theta + j\operatorname{sen}\theta$$

4-2 Dibujar el plano complejo y situar los siguientes números complejos. Expresar cada uno de ellos en forma polar y repetir el dibujo. Comparar las dos representaciones gráficas para cerciorarse de que las conversiones fueron bien hechas.

(*a*) $2 - j2$ (*b*) $3 + j8$ (*c*) $-5 + j3$ (*d*) $-4 - j4$ (*e*) $5 + j0$ (*f*) $j6$ (*g*) -4 (*h*) $-j5$

4-3 Expresar cada uno de los números complejos que se dan a continuación en forma polar:

(*a*) $15e^{j\pi/4}$ (*b*) $5e^{-j2\pi/3}$ (*c*) $-4e^{j5\pi/6}$ (*d*) $-2e^{-j\pi/2}$ (*e*) $10e^{-j7\pi/6}$ (*f*) $-18e^{-j3\pi/2}$

Sol. (*a*) $15\underline{/45^\circ}$, (*b*) $5\underline{/-120^\circ}$, (*c*) $4\underline{/-30^\circ}$, (*d*) $2\underline{/90^\circ}$, (*e*) $10\underline{/-210^\circ}$ ó $10\underline{/150^\circ}$, (*f*) $18\underline{/-90^\circ}$

4-4 Efectuar la operación que se indica:

(*a*) $z = 3 - j4$. Hallar zz^*.
(*b*) $z = 10\underline{/-40^\circ}$. Hallar zz^*.
(*c*) $z = 20\underline{/53{,}1^\circ}$. Hallar $z + z^*$.
(*d*) $z = 2{,}5e^{-j\pi/3}$. Hallar zz^*.
(*e*) $z = 2 + j8$. Hallar $z - z^*$.
(*f*) $z = 10 - j4$. Hallar $z + z^*$.
(*g*) $z = 95\underline{/25^\circ}$. Hallar $z - z^*$.
(*h*) $z = r\underline{/\theta}$. Hallar z/z^*.

Sol. (*a*) 25, (*b*) 100, (*c*) 24, (*d*) 6,25, (*e*) $j16$, (*f*) 20, (*g*) $j80{,}2$, (*h*) $1\underline{/2\theta}$.

4-5 Hallar las raíces que se indican de los números complejos siguientes:

(*a*) $\sqrt{5 + j8}$ (*b*) $\sqrt{150\underline{/-60^\circ}}$ (*c*) $\sqrt[3]{6{,}93 - j4}$ (*d*) $\sqrt[3]{27e^{j3\pi/2}}$ (*e*) $\sqrt[4]{1}$ (*f*) $\sqrt{4}$

Sol. (*a*) $3{,}07\underline{/29^\circ}$, $3{,}07\underline{/209^\circ}$, (*b*) $12{,}25\underline{/-30^\circ}$, $12{,}25\underline{/150^\circ}$, (*c*) $2\underline{/-10^\circ}$, $2\underline{/110^\circ}$, $2\underline{/230^\circ}$, (*d*) $3e^{j\pi/2}$, $3e^{j7\pi/6}$, $3e^{j11\pi/6}$, (*e*) $1\underline{/0}$, $1\underline{/90^\circ}$, $1\underline{/180^\circ}$, $1\underline{/270^\circ}$, (*f*) $2\underline{/0}$, $2\underline{/180^\circ}$, es decir, ± 2.

4-6 Hallar el logaritmo neperiano de los números complejos (*a*)-(*d*). En el apartado (*e*) calcular el producto mediante logaritmos.

(*a*) $20\underline{/45^\circ}$, (*b*) $6\underline{/-60^\circ}$, (*c*) $0{,}5\underline{/120^\circ}$, (*d*) $0{,}3\underline{/180^\circ}$, (*e*) $(0{,}3\underline{/180^\circ})(20\underline{/45^\circ})$

Sol. (*a*) $3 + j\pi/4$, (*b*) $1{,}79 - j\pi/3$, (*c*) $-0{,}693 + j2\pi/3$, (*d*) $-1{,}2 + j\pi$, (*e*) $6\underline{/225^\circ}$

4-7 Mediante la regla de cálculo, pasar de forma polar a binómica cada uno de los números complejos que se indican.

(*a*)	$12{,}3\underline{/30^\circ}$	*Sol.* $10{,}63 + j6{,}15$	(*e*)	$0{,}05\underline{/-20^\circ}$	*Sol.* $0{,}047 - j0{,}0171$
(*b*)	$53\underline{/160^\circ}$	$-49{,}8 + j18{,}1$	(*f*)	$0{,}003\underline{/80^\circ}$	$0{,}00052 + j0{,}00295$
(*c*)	$25\underline{/-45^\circ}$	$17{,}7 - j17{,}7$	(*g*)	$0{,}013\underline{/260^\circ}$	$-0{,}00226 - j0{,}0128$
(*d*)	$86\underline{/-115^\circ}$	$-36{,}3 - j78$	(*h*)	$0{,}156\underline{/-190^\circ}$	$-0{,}1535 + j0{,}0271$

4-8 Mediante la regla de cálculo, pasar de forma binómica a polar cada uno de los números complejos que se indican.

(*a*)	$-12 + j16$	*Sol.* $20\underline{/126{,}8^\circ}$	(*e*)	$0{,}048 - j0{,}153$	*Sol.* $0{,}160\underline{/-72{,}55^\circ}$
(*b*)	$2 - j4$	$4{,}47\underline{/-63{,}4^\circ}$	(*f*)	$0{,}0171 + j0{,}047$	$0{,}05\underline{/70^\circ}$
(*c*)	$-59 - j25$	$64\underline{/203^\circ}$	(*g*)	$-69{,}4 - j40$	$80\underline{/210^\circ}$
(*d*)	$700 + j200$	$727\underline{/16^\circ}$	(*h*)	$-2 + j2$	$28{,}3\underline{/135^\circ}$

4-9 Mediante la regla de cálculo, pasar de forma polar a binómica cada uno de los números complejos que se indican:

(*a*) $10\angle 3^\circ$ *Sol.* $10 + j0{,}523$
(*b*) $25\angle 88^\circ$ $0{,}871 + j25$
(*c*) $50\angle -93^\circ$ $-2{,}62 - j50$
(*d*) $45\angle 179^\circ$ $-45 + j0{,}785$
(*e*) $0{,}02\angle 94^\circ$ *Sol.* $-0{,}00139 + j0{,}02$
(*f*) $0{,}70\angle 266^\circ$ $-0{,}0488 - j0{,}70$
(*g*) $0{,}80\angle -5^\circ$ $0{,}8 - j0{,}0696$
(*h*) $200\angle 181^\circ$ $-200 - j3{,}49$

4-10 Mediante la regla de cálculo, pasar de forma binómica a forma polar cada uno de los números complejos que se indican:

(*a*) $540 + j40$ *Sol.* $540\angle 4{,}25^\circ$
(*b*) $-10 - j250$ $250\angle -92{,}29^\circ$
(*c*) $8 - j0{,}5$ $8\angle 3{,}58^\circ$
(*d*) $25 + j717$ $717\angle 88^\circ$
(*e*) $0{,}8 - j0{,}0696$ *Sol.* $0{,}8\angle -5^\circ$
(*f*) $10 + j0{,}523$ $10\angle 3^\circ$
(*g*) $-200 - j3{,}49$ $200\angle 181^\circ$
(*h*) $0{,}02 - j0{,}001$ $0{,}02\angle -2{,}87^\circ$

4-11 Como ejercicio con la regla de cálculo, pasar de una a otra forma los números complejos que se indican. Pasar las respuestas a la forma original:

(*a*) $40\angle 10^\circ$ (*b*) $18 - j9$ (*c*) $0{,}03 + j0{,}80$ (*d*) $0{,}06\angle -100^\circ$
(*e*) $5{,}0 + j0{,}3$ (*f*) $0{,}50\angle 174^\circ$ (*g*) $180 + j55$ (*h*) $25\angle 88^\circ$
(*i*) $-0{,}05 - j0{,}80$ (*j*) $150\angle -5^\circ$ (*k*) $0{,}002\angle -178^\circ$ (*l*) $-1080 + j250$
(*m*) $80\angle -98^\circ$ (*n*) $-15 - j30$ (*o*) $5\angle 233{,}1^\circ$ (*p*) $-26 + j15$
(*q*) $0{,}85\angle 1^\circ$ (*r*) $3 + j4$ (*s*) $20\angle -143{,}1^\circ$ (*t*) $-5 - j8{,}66$

4-12 Hallar la suma o diferencia de los números complejos que se indican:

(*a*) $(10\angle 53{,}1^\circ) + (4 + j2)$ *Sol.* $10 + j10$
(*b*) $(10\angle 90^\circ) + (8 - j2)$ $8 + j8$
(*c*) $(-4 - j6) + (2 + j4)$ $-2 - j2$
(*d*) $(2{,}83\angle 45^\circ) - (2 - j8)$ $j10$
(*e*) $(-5 + j5) - (7{,}07\angle 135^\circ)$ *Sol.* 0
(*f*) $(2 - j10) - (1 - j10)$ 1
(*g*) $(10 + j1) + 6 - (13{,}45\angle -42^\circ)$ $6 + j10$
(*h*) $-(5\angle 53{,}1^\circ) - (1 - j6)$ $-4 + j2$

4-13 Hallar el producto de los números complejos que se indican. Como ejercicio complementario, se pueden convertir todos los complejos a forma polar y calcular de nuevo su producto, comprobando el resultado:

(*a*) $(3 - j2)(1 - j4)$ *Sol.* $-5 - j14$
(*b*) $(2 + j0)(3 - j3)$ $6 - j6$
(*c*) $(-1 - j1)(1 + j1)$ $-j2$
(*d*) $(j2)(4 - j3)$ $6 + j8$
(*e*) $(j2)(j5)$ *Sol.* -10
(*f*) $(-j1)(j6)$ 6
(*g*) $(2 + j2)(2 - j2)$ 8
(*h*) $(x + jy)(x - jy)$ $x^2 + y^2$

4-14 Hallar el cociente de los números complejos que se indican multiplicando numerador y denominador por el complejo conjugado del denominador. Pasar los números a forma polar y calcular de nuevo su cociente comprobando el resultado:

(*a*) $(5 + j5)/(1 - j1)$ *Sol.* $j5$
(*b*) $(4 - j8)/(2 + j2)$ $-1 - j3$
(*c*) $(5 - j10)/(3 + j4)$ $-1 - j2$
(*d*) $(8 + j12)/(j2)$ $6 - j4$
(*e*) $(3 + j3)/(2 + j2)$ *Sol.* $1{,}5$
(*f*) $(-5 - j10)/(2 + j4)$ $-2{,}5$
(*g*) $10/(6 + j8)$ $0{,}6 - j0{,}8$
(*h*) $j5/(2 - j2)$ $-1{,}25 + j1{,}25$

4-15 Hallar cada unos de los productos que se indican:

(*a*) $(2{,}5 + j10)(-0{,}85 + j4{,}3)$ *Sol.* $45\angle 177{,}1^\circ$
(*b*) $(3{,}8 - j1{,}5)(6 - j2{,}3)$ $26{,}2\angle -42{,}6^\circ$
(*c*) $(72 - j72)(1{,}3 + j4{,}8)$ $506\angle 29{,}8^\circ$
(*d*) $(3\angle 20^\circ)(2\angle -45^\circ)$ $6\angle -25^\circ$
(*e*) $(2 + j6)(18\angle 21^\circ)$ *Sol.* $113{,}5\angle 92{,}5^\circ$
(*f*) $1\angle 80^\circ\ (25\angle -45^\circ)(0{,}2\angle -15^\circ)$ $5\angle 20^\circ$
(*g*) $(12 - j16)(0{,}23 + j0{,}75)$ $15{,}66\angle 19{,}7^\circ$
(*h*) $(j1{,}63)(2{,}6 + j1)$ $4{,}53\angle 111{,}1^\circ$

4-16 Expresar cada una de las relaciones por un único complejo:

(*a*) $(23{,}5 + j8{,}55)/(4{,}53 - j2{,}11)$ *Sol.* $5\angle 45^\circ$
(*b*) $(21{,}2 - j21{,}2)/(3{,}54 - j3{,}54)$ $6\angle 0^\circ$
(*c*) $(-7{,}07 + j7{,}07)/(4{,}92 + j0{,}868)$ $2\angle 125^\circ$
(*d*) $(-j45)/(6{,}36 - j6{,}36)$ $5\angle -45^\circ$
(*e*) $(6{,}88\angle 12^\circ)/(2 + j1)$ *Sol.* $3{,}08\angle -14{,}6^\circ$
(*f*) $(5 + j5)/5\angle 80^\circ$ $1{,}414\angle -35^\circ$
(*g*) $1/(6 + j8)$ $0{,}1\angle -53{,}1^\circ$
(*h*) $(-10 + j20)/(2 - j1)$ $10\angle 143{,}2^\circ$

4-17 En cada uno de los casos siguientes hallar el valor de la expresión $z_1 z_2/(z_1 + z_2)$:

(*a*) $z_1 = 10 + j5,\ z_2 = 20\angle 30^\circ$ *Sol.* $7{,}18\angle 27{,}8^\circ$
(*b*) $z_1 = 5\angle 45^\circ,\ z_2 = 10\angle -70^\circ$ $5{,}5\angle 15{,}2^\circ$
(*c*) $z_1 = 6 - j2,\ z_2 = 1 + j8$ *Sol.* $5{,}52\angle 23{,}81^\circ$
(*d*) $z_1 = 20,\ z_2 = j40$ $17{,}9\angle 26{,}6^\circ$