

Capítulo 7

Potencia eléctrica y factor de potencia

INTRODUCCION

En muchos dispositivos eléctricos uno de los parámetros que más interesa es el de la potencia. Por ejemplo, es importante conocer la potencia suministrada por un alternador, la potencia consumida por un motor eléctrico, la potencia emitida por una emisora de radio o televisión, etc.

La tensión aplicada al circuito de elementos pasivos de la Fig. 7-1 es una función del tiempo. La intensidad que resulta es, igualmente, una función del tiempo cuyo valor depende de los elementos que integren dicho circuito. El producto, en cada instante, de la tensión por la intensidad se llama potencia instantánea y viene dada por

$$p = vi$$

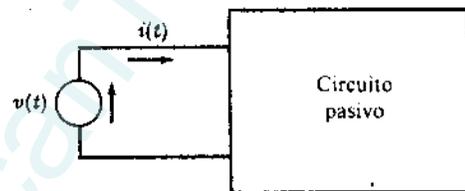


Fig. 7-1

La potencia p puede tomar valores positivos o negativos, según el instante o el intervalo de tiempo que se considere. Una potencia p positiva significa una transferencia de energía de la fuente a la red, mientras que una potencia p negativa corresponde a una transferencia de energía de la red a la fuente.

POTENCIA EN REGIMEN PERMANENTE SENOIDAL: POTENCIA ACTIVA (P)

Consideremos el caso ideal en que el circuito pasivo contenga, exclusivamente, un elemento inductivo al que se le aplica una tensión senoidal de la forma $v = V_m \sin \omega t$. La intensidad de corriente que circula es de la forma $i = I_m \sin(\omega t - \pi/2)$. El valor de la potencia instantánea es

$$p = vi = V_m I_m (\sin \omega t)(\sin \omega t - \pi/2)$$

Como $\sin(\omega t - \pi/2) = -\cos \omega t$ y $2 \sin x \cos x = \sin 2x$, podremos escribir

$$p = -\frac{1}{2} V_m I_m \sin 2\omega t$$

En la Fig. 7-2 se pone de manifiesto este hecho. Cuando v e i son positivos, la potencia p es positiva, por lo que existirá una transferencia de energía de la fuente a la bobina. Cuando v e i son de signo contrario, la potencia es negativa, y la bobina devuelve a la fuente la energía que antes le había suministrado. La frecuencia de la potencia es el doble que la correspondiente a la tensión o la corriente. El valor medio de la potencia, que representaremos por P , en un ciclo o periodo completo es cero.

En el caso ideal, también, de que el circuito estuviese formado por un condensador puro de capacidad C obtendríamos resultados análogos, como puede apreciarse en la Figura 7-3.

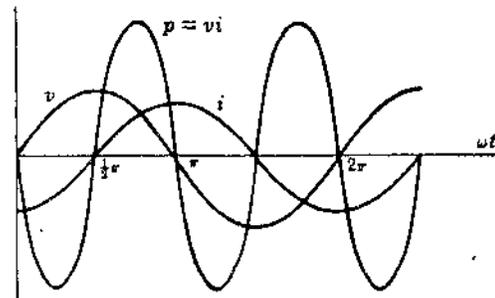


Fig. 7-2. Circuito de una bobina pura L

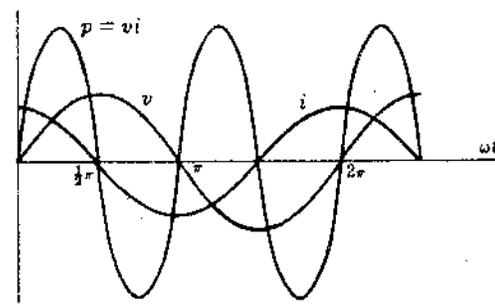


Fig. 7-3. Circuito de un condensador puro C

Apliquemos ahora una tensión $v = V_m \text{ sen } \omega t$ a un circuito constituido por una sola resistencia. La intensidad de corriente que circula por ella es $i = I_m \text{ sen } \omega t$ y la potencia correspondiente

$$p = vi = V_m I_m \text{ sen}^2 \omega t$$

Ahora bien, $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, con lo cual

$$p = \frac{1}{2} V_m I_m (1 - \cos 2\omega t)$$

resultado que se puede observar en la Fig. 7-4. En este caso vemos que la frecuencia de la potencia es también el doble de la correspondiente a la tensión o a la corriente. Además, la potencia es siempre positiva y varía desde cero a un valor máximo $V_m I_m$. El valor medio de la potencia es $\frac{1}{2} V_m I_m$.

Finalmente, consideremos el caso de un circuito pasivo general. Aplicando una tensión senoidal $v = V_m \text{ sen } \omega t$, circula una corriente de intensidad $i = I_m \text{ sen } (\omega t + \theta)$. El ángulo de fase θ será positivo o negativo, según el carácter inductivo o capacitivo, respectivamente, del circuito. La potencia instantánea es

$$p = vi = V_m I_m \text{ sen } \omega t \text{ sen } (\omega t + \theta)$$

Ahora bien, $\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]$ y $\cos -\alpha = \cos \alpha$, con lo cual

$$p = \frac{1}{2} V_m I_m [\cos \theta - \cos (2\omega t + \theta)]$$

La potencia instantánea p consta de un término cosenoidal, $-\frac{1}{2} V_m I_m \cos (2\omega t + \theta)$, cuyo valor medio es cero, y de un término constante, $\frac{1}{2} V_m I_m \cos \theta$. En estas condiciones, el valor medio de p o potencia activa P es

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \theta = VI \cos \theta$$

en donde $V = V_m / \sqrt{2}$ e $I = I_m / \sqrt{2}$ son los valores eficaces de los fasores \mathbf{V} e \mathbf{I} , respectivamente. El término $\cos \theta$ se llama *factor de potencia* (f.p.). El ángulo θ es el que forman \mathbf{V} e \mathbf{I} y está siempre comprendido entre $\pm 90^\circ$. De aquí se deduce que $\cos \theta$ y, por tanto, P , es siempre positivo. Sin embargo, para indicar el signo de θ diremos que un *circuito inductivo*, en el que la intensidad de corriente está retrasada respecto de la tensión, tiene un *factor de potencia en retraso*. Un *circuito capacitivo*, como la corriente está adelantada respecto de la tensión, tiene un *factor de potencia en adelanto*.

La potencia activa P también se puede deducir de la expresión de definición de la potencia media $P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt$.

La unidad de potencia activa en el sistema mksa es el vatio (W); como múltiplo se emplea el kilovatio (kW), de manera que $1 \text{ kW} = 1000 \text{ W}$.

POTENCIA APARENTE (S)

El producto VI se llama *potencia aparente* y se representa por la letra mayúscula S .

La unidad de S en el sistema mksa es el voltio-amperio (VA), y su múltiplo más empleado es el kilovoltio-amperio (kVA), siendo $1 \text{ kVA} = 1000 \text{ VA}$.

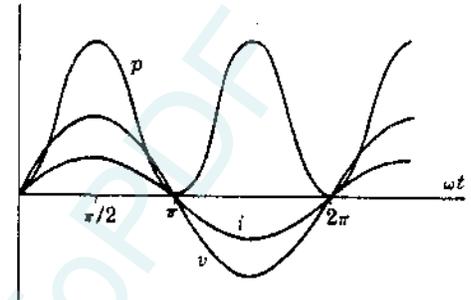


Fig. 7-4. Circuito de una resistencia pura R

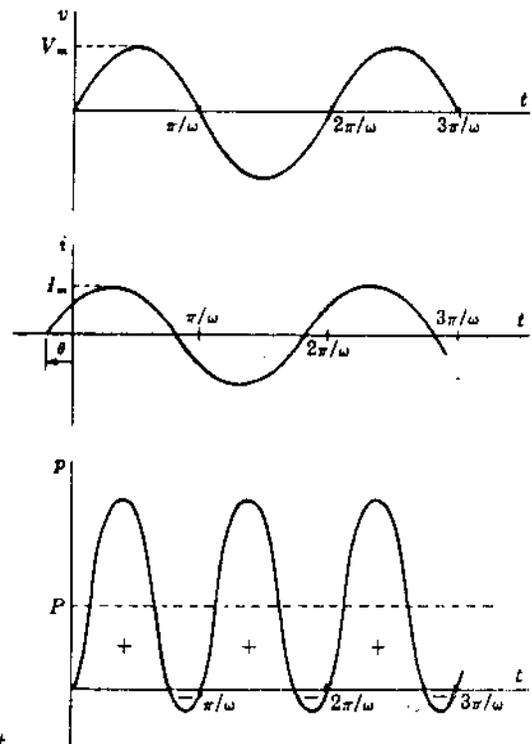


Fig. 7-5

POTENCIA REACTIVA (Q)

El producto $VI \sin \theta$ se llama *potencia reactiva* y se representa por la letra mayúscula Q .

La unidad de Q en el sistema mksa es el voltio-amperio reactivo (VAR), y su múltiplo más empleado es el kilovoltio-amperio reactivo (kVAR), siendo $1 \text{ kVAR} = 1000 \text{ VAR}$.

TRIANGULO DE POTENCIAS

Las expresiones de las potencias activa, aparente y reactiva se pueden representar geoméricamente mediante los lados de un triángulo que se llama *triángulo de potencias*.

Sea un circuito inductivo y representemos el retraso de la intensidad de corriente como indica la Fig. 7-6(a), esto es, tomando la tensión V como referencia. En la Fig. 7-6(b) está representada la intensidad de corriente con sus componentes activa y reactiva. La componente activa está en fase con la tensión V y la componente reactiva está en cuadratura con V , es decir, defasada 90° en retraso. Este diagrama se repite en la Fig. 7-6(c), en donde I , $I \cos \theta$ e $I \sin \theta$ están multiplicados por la tensión eficaz V . En este caso:

Potencia activa $P = \text{tensión} \times \text{componente activa (en fase) de la intensidad} = VI \cos \theta$

Potencia aparente $S = \text{tensión} \times \text{intensidad} = VI$

Potencia reactiva $Q = \text{tensión} \times \text{componente reactiva (en cuadratura) de la intensidad} = VI \sin \theta$

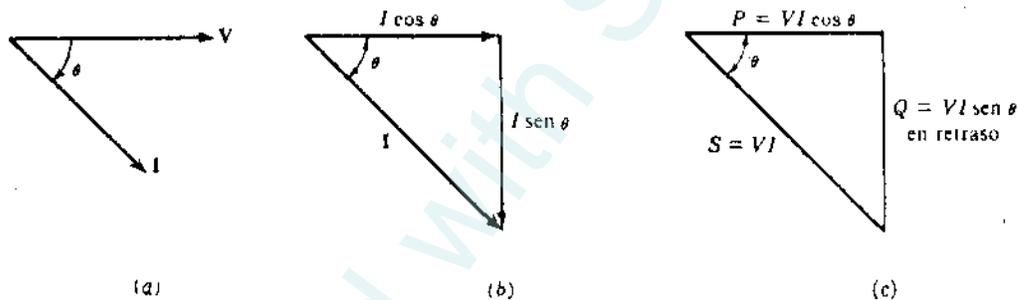


Fig. 7-6. Triángulo de potencias: Carga inductiva

Con un procedimiento análogo se construyen los diagramas de la Fig. 7-7. El triángulo de potencias para una carga capacitiva tiene la componente Q por encima de la horizontal.

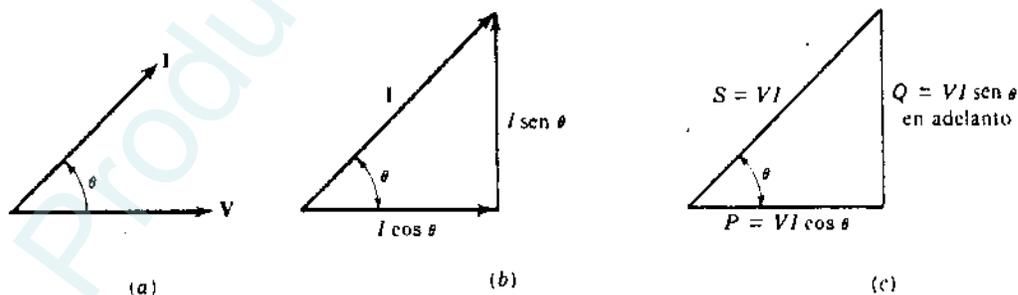


Fig. 7-7. Triángulo de potencias: Carga capacitiva

POTENCIA COMPLEJA

Los tres lados S , P y Q del triángulo de potencias se deducen del producto VI^* de la tensión por el complejo conjugado de la intensidad. El resultado de este producto es un número complejo que se llama *potencia compleja* S . Su parte real es la potencia activa P y su parte imaginaria es la potencia reactiva Q .

Sean $V = Ve^{j\alpha}$ e $I = Ie^{j(\alpha+\theta)}$. Entonces,

$$S = VI^* = Ve^{j\alpha}Ie^{-j(\alpha+\theta)} = VIe^{-j\theta} = VI \cos \theta - jVI \sin \theta = P - jQ$$

El módulo de S es la potencia aparente $S = VI$. Un ángulo de fase en adelanto (I adelantada respecto de V) implica una potencia reactiva (Q) en adelanto, mientras que un ángulo de fase en retraso quiere decir una potencia reactiva Q en retraso. Este hecho debe tenerse muy presente al construir el triángulo de potencias.

A continuación haremos un resumen de las ecuaciones a emplear para hallar las componentes del triángulo de potencias.

$$\text{Potencia activa } P = VI \cos \theta = RI^2 = V_R^2/R = \text{Re}[VI^*]$$

$$\text{Potencia reactiva } Q = VI \sin \theta = XI^2 = V_X^2/X = \text{Im}[VI^*]$$

$$\text{Potencia aparente } S = VI = ZI^2 = V^2/Z = \text{módulo de } VI^*$$

$$\text{Factor de potencia (f.p.)} = \cos \theta = R/Z = P/S$$

Ejemplo 1.

Trazar el triángulo de potencias de un circuito cuya impedancia es $Z = 3 + j4$ ohmios y al que se le aplica un fasor tensión $V = 100/30^\circ$ voltios.

El fasor intensidad de corriente que resulta es $I = V/Z = (100/30^\circ)/(5/53,1^\circ) = 20/-23,1^\circ$ A.

Método 1.

$$P = RI^2 = 3(20)^2 = 1200 \text{ W}$$

$$Q = XI^2 = 1600 \text{ VAR en retraso}$$

$$S = ZI^2 = 2000 \text{ VA}$$

$$\text{f.p.} = \cos 53,1^\circ = 0,6 \text{ en retraso}$$

Método 2.

$$S = VI = 100(20) = 2000 \text{ VA}$$

$$P = VI \cos \theta = 2000 \cos 53,1^\circ = 1200 \text{ W}$$

$$Q = VI \sin \theta = 2000 \sin 53,1^\circ = 1600 \text{ VAR en retraso}$$

$$\text{f.p.} = \cos \theta = \cos 53,1^\circ = 0,6 \text{ en retraso}$$

Método 3.

$$S = VI^* = (100/30^\circ)(20/23,1^\circ) = 2000/53,1^\circ = 1200 + j1600; \text{ por tanto,}$$

$$P = 1200 \text{ W, } Q = 1600 \text{ VAR en retraso, } S = 2000 \text{ VA y f.p.} = \cos 53,1^\circ = 0,6 \text{ en retraso}$$

Método 4.

$$V_R = RI = 20/-23,1^\circ(3) = 60/-23,1^\circ, \quad V_X = (20/-23,1^\circ)(j4/90^\circ) = 80/66,9^\circ$$

Por tanto,

$$P = V_R^2/R = 60^2/3 = 1200 \text{ W}$$

$$Q = V_X^2/X = 80^2/4 = 1600 \text{ VAR en retraso}$$

$$S = V^2/Z = 100^2/5 = 2000 \text{ VA}$$

$$\text{f.p.} = P/S = 0,6 \text{ en retraso}$$

Debe tenerse un cuidado especial al sustituir valores en la ecuación $P = V_R^2/R$. El error que se comete con más frecuencia consiste en sustituir V_R , tensión en la resistencia únicamente, por la tensión total V en la impedancia Z .

CORRECCION DEL FACTOR DE POTENCIA

En las aplicaciones industriales se suele trabajar con cargas inductivas, por lo que la intensidad retrasa respecto de la tensión aplicada. La potencia activa P entregada a la carga es una medida del trabajo útil por unidad de tiempo que puede realizar la carga. Esta potencia se transmite, normalmente, a través de líneas y transformadores.

Como un transformador trabaja, en general, a tensión constante, la potencia aparente en kVA da idea de la intensidad máxima permitida. Teóricamente, si se conectase una carga inductiva o capacitiva pura, el transformador podría estar trabajando a plena carga, mientras que la potencia activa (media) suministrada sería cero.

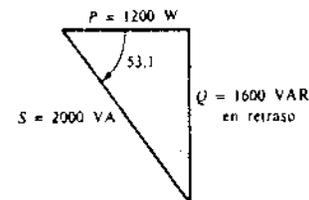


Fig. 7-8

En el triángulo de potencias, la hipotenusa S es una medida de la carga del sistema de distribución, y el cateto P es una medida de la potencia útil suministrada. Evidentemente, interesa que S se aproxime lo más posible a P , es decir, que el ángulo θ sea muy pequeño. Como el factor de potencia es $f.p. = \cos \theta$, valdría aproximadamente la unidad. En el caso normal de una carga inductiva es posible corregir el factor de potencia mediante condensadores en paralelo con la carga. Obsérvese que la tensión en la carga es la misma, con lo que la potencia útil P tampoco varía. Al aumentar el factor de potencia la intensidad y la potencia aparente disminuyen y, por tanto, se consigue una utilización más eficiente de la potencia en el sistema o red de distribución.

Ejemplo 2.

En el circuito del Ejemplo 1 corregir el factor de potencia al valor 0,9, en retraso, utilizando condensadores en paralelo. Hallar el valor de la potencia aparente S' después de introducir la corrección, y la potencia reactiva de los condensadores necesarios para obtener dicha corrección.

Representemos de nuevo el triángulo de potencias del Ejemplo 1. En este caso, $0,9 = \cos \theta'$, de donde $\theta' = 26^\circ$ y

$$S' = P / \cos \theta' = 1200 / \cos 26^\circ = 1333$$

Ahora bien, $Q' = S' \sin \theta' = 1333 \sin 26^\circ = 585$ VAR en retraso.

$$\begin{aligned} \text{Potencia reactiva del condensador} &= Q - Q' = 1600 - 585 \\ &= 1015 \text{ VAR en adelanto} \end{aligned}$$

Como P no varía, la energía activa permanece constante después de la corrección. Sin embargo, el valor de S se reduce de 2000 VA a 1333 VA.

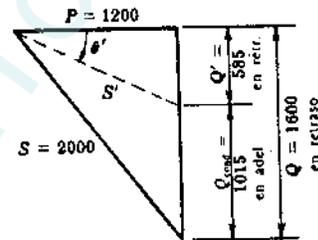


Fig. 7-9

Problemas resueltos

- 7-1 Trazar el triángulo de potencias de un circuito cuya tensión es $v = 150 \sin(\omega t + 10^\circ)$ voltios y cuya intensidad viene dada por $i = 5 \sin(\omega t - 50^\circ)$ amperios.

$$V = (150/\sqrt{2})/10^\circ = 106/10^\circ \quad \text{e} \quad I = (5/\sqrt{2})/-50^\circ = 3,54/-50^\circ$$

Entonces,

$$S = VI^* = (106/10^\circ)(3,54/50^\circ) = 375/60^\circ = 187,5 + j325$$

de donde

$$P = \text{Re}[VI^*] = 187,5 \text{ W}$$

$$Q = \text{Im}[VI^*] = 325 \text{ VAR en retraso}$$

$$S = |VI^*| = 375 \text{ VA}$$

$$f.p. = \cos 60^\circ = 0,5 \text{ en retraso}$$

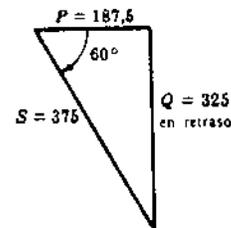


Fig. 7-10

- 7-2 La potencia consumida por un circuito serie de dos elementos vale 940 vatios, siendo el factor de potencia igual a 0,707 en adelanto. Hallar las constantes del circuito sabiendo que la tensión aplicada es $v = 99 \sin(6000t + 30^\circ)$ voltios.

El fasor tensión aplicado es $V = (90/\sqrt{2})/30^\circ = 70/30^\circ$. De la expresión de la potencia $P = VI \cos \theta$ resulta $940 = 70I(0,707)$, de donde $I = 19$ A. Como el factor de potencia vale 0,707 en adelanto, el fasor intensidad de corriente está adelantado con respecto al de tensión un ángulo $\text{arc cos } 0,707 = 45^\circ$. Por tanto, $I = 19/75^\circ$ A. La impedancia del circuito es $Z = V/I = (70/30^\circ)/(19/75^\circ) = 3,68/-45^\circ = 2,6 - j2,6 \Omega$. Ahora bien, como $Z = R - jX_C$, y $X_C = 1/\omega C$, se deduce

$$\sqrt{\quad} \quad R = 2,6 \Omega \quad \text{y} \quad C = \frac{1}{6000(2,6)} = 64,1 \mu\text{F}$$

Otro método.

Sustituyendo $I = 19$ A en $P = RI^2$ resulta $940 = R(19)^2$, de donde $R = 2,6 \Omega$.

Entonces, $Z = Z/-45^\circ = 2,6 - jX_C$, con lo que $X_C = 2,6$. Por consiguiente, $C = 1/\omega X_C = 64,1 \mu\text{F}$.

7-3 Determinar el triángulo de potencias del circuito serie representado en la Figura 7-11.

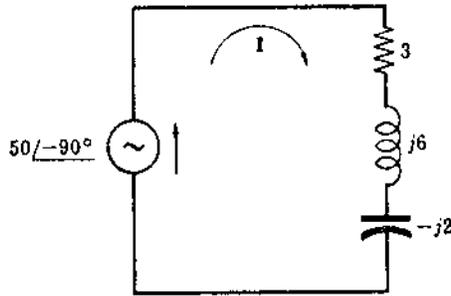


Fig. 7-11

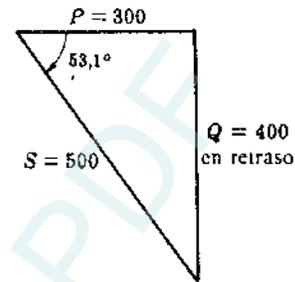


Fig. 7-12

De la Fig. 7-11, $Z = 3 + j6 - j2 = 5/53,1^\circ$ e $I = V/Z = (50/-90^\circ)/(5/53,1^\circ) = 10/-143,1^\circ$. Entonces,
 $S = VI^* = (50/-90^\circ)(10/143,1^\circ) = 500/53,1^\circ = 300 + j400$

Los lados del triángulo de potencias representado en la Fig. 7-12 son

$$P = 300 \text{ W}, \quad Q = 400 \text{ VAR en retraso}, \quad S = 500 \text{ VA, f.p.} = \cos 53,1^\circ = 0,6 \text{ en retraso}$$

Otro método.

Sustituyendo el valor $I = 10 \text{ A}$ en las expresiones de la potencia disipada en cada elemento resulta

$$P = RI^2 = 3(10)^2 = 300 \text{ W}, \quad Q_{j6} = 6(10)^2 = 600 \text{ VAR en retraso}, \quad Q_{-j2} = 2(10)^2 = 200 \text{ VAR en adelante}$$

$$\text{y } Q = Q_{j6} + Q_{-j2} = 400 \text{ VAR en retraso.}$$

7-4 En el circuito de la Fig. 7-13 el valor eficaz de la intensidad de corriente total es 30 amperios. Hallar las potencias.

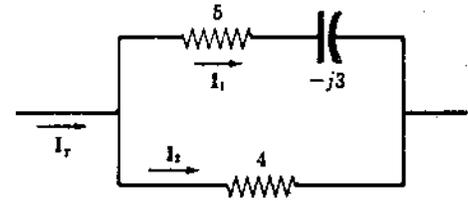


Fig. 7-13

$$\text{Haciendo } I_T = 30/0^\circ, \quad I_2 = 30/0^\circ \left(\frac{5-j3}{9-j3} \right) = 18,45/-12,55^\circ \text{ e } I_1 = 30/0^\circ \left(\frac{4}{9-j3} \right) = 12,7/18,45^\circ.$$

Entonces,

$$P = R_4 I_2^2 + R_3 I_1^2 = (4)(18,45)^2 + (5)(12,7)^2 = 2165 \text{ W}$$

$$Q = X I_1^2 = (3)(12,7)^2 = 483 \text{ VAR en adelante}$$

$$S = P - jQ = 2165 - j483 = 2210/-12,6^\circ, \quad S = 2210 \text{ VA}$$

$$\text{f.p.} = P/S = 2165/2210 = 0,98 \text{ en adelante}$$

Podemos obtener los mismos resultados calculando la impedancia equivalente $Z_{eq} = \frac{(5-j3)4}{9-j3} = 2,4 - j0,533 \Omega$. Por tanto,

$$P = R I_T^2 = (2,4)(30)^2 = 2160 \text{ W} \quad \text{y} \quad Q = (0,533)(30)^2 = 479,7 \text{ VAR en adelante}$$

7-5 La potencia total disipada en el circuito de la Figura 7-14 es 1100 vatios. Hallar la potencia de cada elemento y la lectura del amperímetro.

De la Fig. 7-14 se deduce,

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{V}{3+j4} = \frac{V}{5/53,1^\circ}, \quad I_2 = \frac{V}{Z_2} = \frac{V}{10}$$

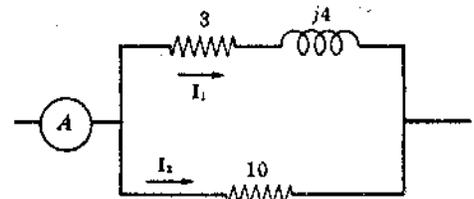


Fig. 7-14

La relación de intensidades de corrientes es $\frac{I_1}{I_2} = \frac{V/5}{V/10} = \frac{2}{1}$. Ahora bien, como $P = RI^2$, la relación entre las potencias disipadas en las resistencias de 3Ω y 10Ω es

$$\frac{P_3}{P_{10}} = \frac{R_1 I_1^2}{R_2 I_2^2} = \frac{3}{10} \left(\frac{2}{1} \right)^2 = \frac{6}{5}$$

Por otra parte, como $P_T = P_3 + P_{10}$, dividiendo ambos miembros por P_{10} resulta $P_T/P_{10} = P_3/P_{10} + 1$, con lo cual,

$$P_{10} = 1100(5/11) = 500 \text{ W}, \quad P_3 = 1100 - 500 = 600 \text{ W}$$

De la expresión $P = RI^2$ se deduce $3I_1^2 = 600$, de donde $I_1 = 14,14$. Tomemos $V = V/0^\circ$; entonces

$$I_1 = 14,14 / -53,1^\circ = 8,48 - j11,31$$

$$I_2 = 7,07 / 0^\circ = 7,07$$

$$e \quad I_T = I_1 + I_2 = 15,55 - j11,31 = 19,25 / -36^\circ$$

La lectura del amperímetro es 19,25 A.

7-6 Determinar el triángulo de potencias de cada rama del circuito paralelo de la Fig. 7-15; obtener luego el correspondiente al circuito completo.

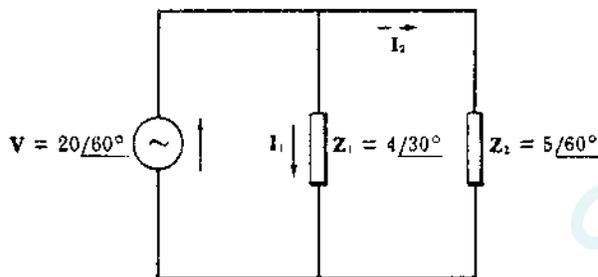


Fig. 7-15

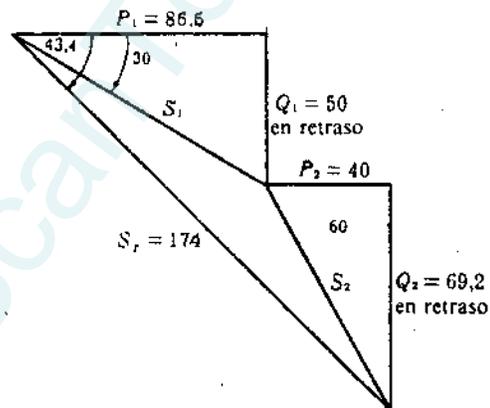


Fig. 7-16

Rama 1.

$$I_1 = V/Z_1 = (20/60^\circ)/(4/30^\circ) = 5/30^\circ$$

$$S_1 = VI_1^* = (20/60^\circ)(5/-30^\circ) = 100/30^\circ$$

$$= 86,6 + j50$$

Entonces,

$$P_1 = \text{Re}[VI_1^*] = 86,6 \text{ W}$$

$$Q_1 = \text{Im}[VI_1^*] = 50 \text{ VAR en retraso}$$

$$S_1 = |VI_1^*| = 100 \text{ VA}$$

$$f.p._1 = P_1/S_1 = 0,866 \text{ en retraso}$$

Rama 2.

$$I_2 = V/Z_2 = (20/60^\circ)/(5/60^\circ) = 4/0^\circ$$

$$S_2 = VI_2^* = (20/60^\circ)(4/0^\circ) = 80/60^\circ$$

$$= 40 + j69,2$$

Entonces,

$$P_2 = 40 \text{ W}$$

$$Q_2 = 69,2 \text{ VAR en retraso}$$

$$S_2 = 80 \text{ VA}$$

$$f.p._2 = 0,5 \text{ en adelante}$$

De los resultados anteriores se deduce inmediatamente el triángulo de potencias total que se representa en la Figura 7-16.

$$P_T = P_1 + P_2 = 86,6 + 40 = 126,6 \text{ W}; \quad Q_T = Q_1 + Q_2 = 50 + 69,2 = 119,2 \text{ VAR en retraso}$$

$$\text{Por tanto, } S_T = P_T + jQ_T = 126,6 + j119,2 = 174/43,4^\circ$$

$$S_T = |S_T| = 174 \text{ VA} \quad \text{y} \quad f.p._T = P_T/S_T = 126,6/174 = 0,727 \text{ en retraso}$$

7-7 El rendimiento de un motor de inducción de 2 caballos de vapor (CV) de potencia de alimentación es del 85%. El factor de potencia de la carga vale 0,8 en retraso. Hallar las potencias eléctricas de entrada.

Como 1 CV = 736 W, $P_{\text{entrada}} = 2(736)/0,85 = 1732 \text{ W}$. Por tanto,

$$S = 1732/0,8 = 2165 \text{ VA}, \quad \theta = \arccos(0,8) = 36,9^\circ, \quad Q = 2165 \sin 36,9^\circ = 1299 \text{ VAR en retraso}$$

- 7-8** Determinar el triángulo de potencias total del circuito paralelo de la Fig. 7-17 sabiendo que la potencia disipada en la resistencia de 2 ohmios es 20 vatios.

Como $P = RI^2$, $2I_1^2 = 20$, de donde $I_1 = 3,16$ A. Por otro lado, $Z_1 = 2 - j5 = 5,38/\underline{-68,2^\circ}$ Ω , con lo que $V = ZI_1 = 3,16(5,38) = 17$ V. Tomando $V = 17/0^\circ$,

$$I_1 = 3,16/68,2^\circ, \quad I_2 = V/Z_2 = (17/0^\circ)/(\sqrt{2}/45^\circ)$$

$$e \quad I_T = I_1 + I_2 = 11,1/\underline{-29,8^\circ}$$

Para determinar las componentes del triángulo de potencias se ha de conocer el valor de S_T .

$$S_T = VI_T^* = 17/0^\circ (11,1/29,8^\circ) = 189/29,8^\circ = 164 + j94$$

de donde

$$P_T = 164 \text{ W}, \quad Q_T = 94 \text{ VAR en retraso}, \quad S_T = 189 \text{ VA}, \quad \text{f.p.} = 164/189 = 0,868 \text{ en retraso}$$

- 7-9** Determinar las componentes del triángulo de potencias de la asociación de tres cargas definidas de la forma siguiente. Carga 1: 250 voltios-amperios con factor de potencia 0,5 en retraso; carga 2: 180 vatios con factor de potencia 0,8 en adelanto; carga 3: 300 voltios-amperios, 100 voltios-amperios reactivos en retraso.

Vamos a calcular las potencias media y reactiva desconocida para cada carga.

Carga 1. Datos $S = 250$ VA, f.p. = 0,5 en retraso.

$$P = S(\text{f.p.}) = 250(0,5) = 125 \text{ W}, \quad \theta = \arccos 0,5 = 60^\circ, \quad Q = S \sin \theta = 250 \sin 60^\circ = 216 \text{ VAR en retraso}$$

Carga 2. Datos $P = 180$ W, f.p. = 0,8 en adelanto.

$$S = P/\text{f.p.} = 180/0,8 = 225 \text{ VA}, \quad \theta = \arccos 0,8 = 36,9^\circ, \quad Q = 225 \sin 36,9^\circ = 135 \text{ VAR en adelanto}$$

Carga 3. Datos $S = 300$ VA, $Q = 100$ VAR en retraso.

$$\theta = \arcsin (Q/S) = \arcsin (100/300) = 19,5^\circ, \quad P = S \cos \theta = 300 \cos 19,5^\circ = 283 \text{ W}$$

$$\text{Por tanto,} \quad P_T = 125 + 180 + 283 = 588 \text{ W}, \quad Q_T = 216 - 135 + 100 = 181 \text{ VAR en retraso}$$

$$\text{Como} \quad S_T = P_T + jQ_T = 588 + j181 = 616/17,1^\circ,$$

$$S_T = 616 \text{ VA} \quad \text{y} \quad \text{f.p.} = P/S = 588/616 = 0,955 \text{ en retraso}$$

La Fig. 7-18 muestra los triángulos de potencia de las cargas individuales y del conjunto.

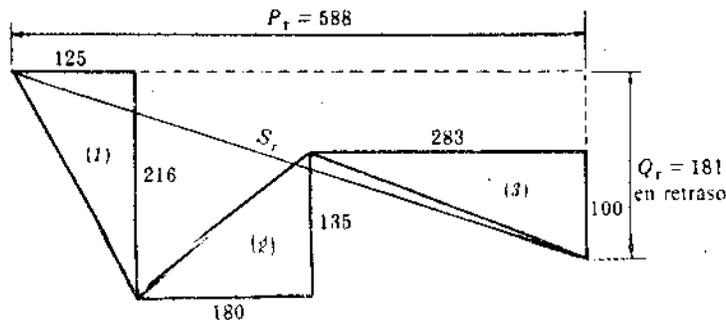


Fig. 7-18

- 7-10** Un transformador de 25 kilovoltios-amperios alimenta una carga de 12 kilovatios con un factor de potencia 0,6 en retraso. Hallar el tanto por ciento respecto de plena carga que soporta el transformador. ¿Cuántos kilovatios en cargas adicionales con factores de potencia la unidad se pueden añadir a dicho transformador sin que trabaje a plena carga?

Para la carga de 12 kW, $S = P/\text{f.p.} = 12/0,6 = 20$ kVA. Por tanto,

$$\% \text{ plena carga} = (20/25)100 = 80 \%$$

Como $\theta = \arccos 0,6 = 53,1^\circ$, $Q = S \sin \theta = 20 \sin 53,1^\circ = 16$ kVAR en retraso. Al ser el factor de potencia de las cargas adicionales la unidad, la potencia reactiva Q será la misma. Por tanto, a plena carga, el ángulo $\theta' = \arcsin (16/25) = 39,8^\circ$ y la potencia total $P_T = S' \cos \theta' = 25 \cos 39,8^\circ = 19,2$ kW. Luego,

$$\begin{aligned} \text{Carga adicional} &= P_T - P = 19,2 - 12 \\ &= 7,2 \text{ kW} \end{aligned}$$

Se podían haber obtenido estos mismos resultados mediante una representación gráfica, como se puede ver en la Figura 7-19.

Obsérvese que con la adición de estas cargas con factor de potencia unidad ha aumentado el factor de potencia total, f.p. = $\cos 39,8^\circ = 0,768$ en retraso.

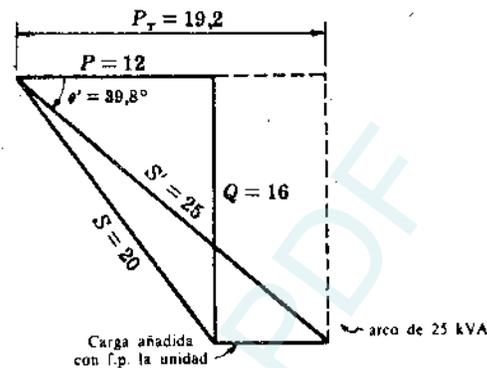


Fig. 7-19

- 7-11** En el transformador del Problema 7-10, supóngase que el factor de potencia de las cargas adicionales es 0,866 en adelanto. ¿Cuántos kilovoltios-amperios de esas cargas se le pueden añadir hasta que el transformador trabaje a plena carga?

Del Problema 7-10, $S = 20$ kVA, $\theta = 53,1^\circ$, $Q = 16$ kVAR en retraso. En la Fig. 7-20(a) tenemos el triángulo correspondiente de potencias. Con la potencia S_2 de las nuevas cargas se añade un ángulo $\theta_2 = \arccos 0,866 = 30^\circ$, y el ángulo θ' es innecesario. En la Figura 7-20(b),

$$25/\sin 96,9^\circ = 20/\sin \beta, \quad \sin \beta = 0,795, \quad \beta = 52,6^\circ$$

Entonces, $\gamma = 180^\circ - (96,9^\circ + 52,6^\circ) = 30,5^\circ$ y $\theta' = 53,1^\circ - 30,5^\circ = 22,6^\circ$.

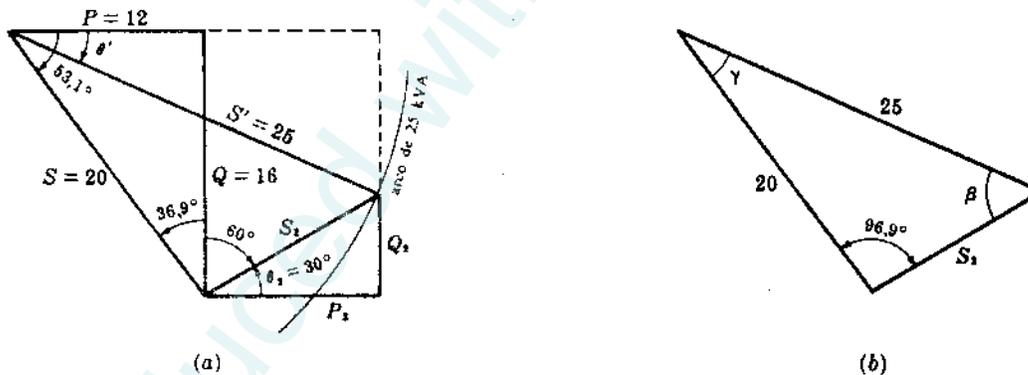


Fig. 7-20

La potencia activa y reactiva a plena carga son $P_T = 25 \cos 22,6^\circ = 23,1$ kW y $Q_T = 25 \sin 22,6^\circ = 9,6$ kVAR en retraso. Para las nuevas cargas, $P_2 = 23,1 - 12 = 11,1$ kW, $Q_2 = 16 - 9,6 = 6,4$ kVAR en adelanto, con lo cual, $S_2 = P_2 + jQ_2 = 11,1 - j6,4 = 12,8/-30^\circ$

$$S_2 = 12,8 \text{ kVA}$$

Estos 12,8 kVA de las nuevas cargas con un factor de potencia 0,866 en adelanto, más los 12 kW con un factor de potencia 0,6 en retraso, completan la potencia aparente de 25 kVA del transformador.

Otro método. En la Fig. 7-20(a), para un ángulo $\theta_2 = 30^\circ$,

$$P_2 = S_2 \cos 30^\circ = (\sqrt{3}/2)S_2, \quad Q_2 = S_2 \sin 30^\circ = \frac{1}{2}S_2$$

Ahora bien,

$$(S')^2 = (P + P_2)^2 + (Q - Q_2)^2$$

Sustituyendo $25^2 = (12 + \sqrt{3}/2 S_2)^2 + (16 - \frac{1}{2}S_2)^2$ de donde $S_2 = 12,8$ kVA

7-12 Un transformador de 500 kilovoltios-amperios funciona a plena carga con un factor de potencia 0,6 en retraso. Añadiendo unos condensadores a la carga se modifica dicho factor pasando a valer 0,9 en retraso. Hallar la potencia reactiva de los condensadores precisos. Después de la corrección del factor de potencia, ¿qué tanto por ciento respecto de plena carga soporta el transformador?

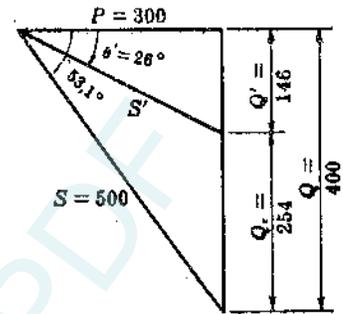


Fig. 7-21

Cuando el transformador funciona a plena carga (véase Fig. 7-21),

$$P = VI \cos \theta = 500(0,6) = 300 \text{ kW}$$

$$\theta = \arccos 0,6 = 53,1^\circ$$

$$Q = VI \sin \theta = 500 \sin 53,1^\circ = 400 \text{ kVAR en retraso}$$

Cuando f.p. = 0,9 en retraso,

$$\theta' = \arccos 0,9 = 26^\circ, \quad S' = 300/0,9 = 333 \text{ kVA}, \quad Q' = 333 \sin 26^\circ = 146 \text{ en retraso}$$

Por tanto, la potencia reactiva de los condensadores es $Q - Q' = 400 - 146 = 254 \text{ kVAR en adelante}$

y $\% \text{ plena carga} = (333/500)100 = 66,7 \%$

7-13 Un grupo de motores de inducción con una potencia activa total de 500 kilovatios y un factor de potencia 0,8 en retraso es sustituido parcialmente por motores sincros con el mismo rendimiento, pero con un factor de potencia 0,707 en adelante. Se siguen haciendo sustituciones, con lo cual el factor de potencia varía continuamente. ¿Qué tanto por ciento de la carga habrá sido sustituida cuando el factor de potencia del sistema valga 0,9 en retraso?

Como los motores sincros tienen el mismo rendimiento que los motores de inducción, la potencia activa total permanece constante e igual a 500 kW. Antes de la sustitución de los motores,

$$S = 500/0,8 = 625 \text{ kVA}, \quad \theta = \arccos 0,8 = 36,9^\circ, \quad Q = 625 \sin 36,9^\circ = 375 \text{ kVAR en retraso}$$

Cuando el factor de potencia del sistema sea 0,9 en retraso,

$$\theta' = \arccos 0,9 = 26^\circ, \quad S' = 500/0,9 = 556 \text{ kVA}, \quad Q' = 556 \sin 26^\circ = 243 \text{ kVAR en retraso}$$

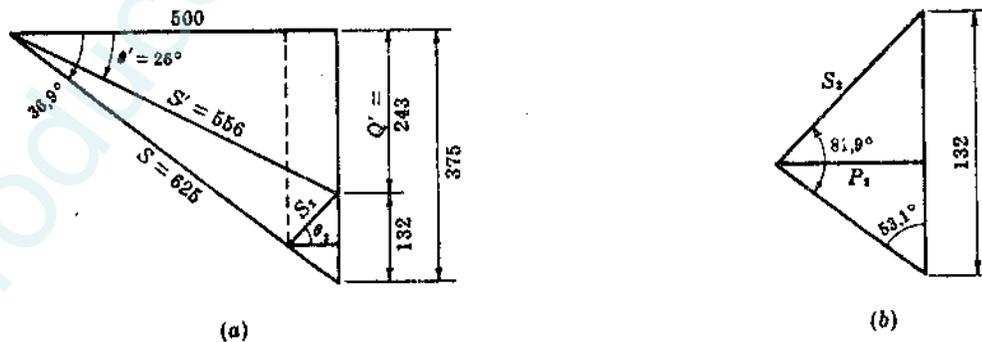


Fig. 7-22

Cuando el factor de potencia sea 0,707 en adelante, $\theta_2 = \arccos 0,707 = 45^\circ$. En la Fig. 7-22(b), aplicando el teorema de los senos,

$$S_2/\sin 53,1^\circ = 132/\sin 81,9^\circ, \quad S_2 = 106,5 \text{ kVA}$$

Por tanto, $P_2 = 106,5 \cos 45^\circ = 75,3 \text{ kW}$ y

$$\% \text{ carga sustituida} = (75,3/500)100 = 15 \%$$

Problemas propuestos

- 7-14 Determinar el triángulo de potencias de un circuito al que se le aplica la tensión $v = 200 \sin(\omega t + 110^\circ)$ voltios y circula la intensidad $i = 5 \sin(\omega t + 20^\circ)$ amperios. *Sol.* $P = 0$; $Q = 500$ VAR en retraso.
- 7-15 Determinar el triángulo de potencias de un circuito al que se le aplica la tensión $v = 14,14 \cos \omega t$ voltios y circula la intensidad $i = 17,1 \cos(\omega t - 14,05^\circ)$ miliamperios. *Sol.* $P = 117,5$ mW; $Q = 29,6$ mVAR en retraso; f.p. = 0,97 en retraso.
- 7-16 Determinar el triángulo de potencias de un circuito al que se le aplica una tensión $v = 340 \sin(\omega t - 60^\circ)$ voltios y circula una intensidad $i = 13,3 \sin(\omega t - 48,7^\circ)$ amperios. *Sol.* $P = 2215$ W; $Q = 442$ VAR en adelanto; f.p. = 0,98 en adelanto.
- 7-17 La tensión eficaz aplicada a un circuito serie de $R = 10$ ohmios y $X_C = 5$ ohmios es 120 voltios. Determinar el triángulo de potencias. *Sol.* $S = 1154 - j577$ VA; f.p. = 0,894 en adelanto.
- 7-18 La tensión eficaz en la resistencia de un circuito serie de $R = 5$ ohmios y $X_L = 15$ ohmios vale 31,6 voltios. Determinar el triángulo de potencias. *Sol.* $S = 200 + j600$ VA; f.p. = 0,316 en retraso.
- 7-19 El fasor de la tensión aplicada a un circuito serie de $R = 8$ ohmios y $X_C = 6$ ohmios es $V = 50 \angle -90^\circ$ voltios. Determinar el triángulo de potencias. *Sol.* $S = 200 - j150$ VA; f.p. = 0,8 en adelanto.
- 7-20 Hallar la impedancia de un circuito que consume 5040 voltios-amperios con un factor de potencia 0,894 en adelanto respecto de un fasor tensión $V = 150 \angle 45^\circ$ voltios. *Sol.* $4 - j2 \Omega$.
- 7-21 Una impedancia por la que circula una corriente eficaz de 18 amperios consume 3500 voltios-amperios con un factor de potencia 0,76 en retraso. Calcular dicha impedancia. *Sol.* $8,21 + j7,0 \Omega$.
- 7-22 Hallar las constantes de un circuito serie de dos elementos por el que circula una intensidad de corriente $i = 4,24 \sin(5000t + 45^\circ)$ amperios y consume 180 vatios con un factor de potencia 0,8 en retraso. *Sol.* $R = 20 \Omega$; $L = 3$ mH.
- 7-23 Determinar el triángulo de potencias del circuito constituido por las impedancias $Z_1 = 5,83 \angle -59^\circ$ ohmios y $Z_2 = 8,95 \angle 63,4^\circ$ ohmios en serie por las que circula una intensidad de corriente eficaz de 5 amperios. *Sol.* $S_T = 175 + j75$ VA; f.p. = 0,918 en retraso.
- 7-24 La potencia reactiva consumida por dos impedancias $Z_1 = 5 \angle 45^\circ$ ohmios y $Z_2 = 10 \angle 30^\circ$ ohmios en serie es 1920 voltios-amperios reactivos en retraso. Hallar la potencia activa P y la potencia aparente S . *Sol.* $P = 2745$ W; $S = 3350$ VA.
- 7-25 El circuito de la Fig. 7-23 consume 36,4 voltios-amperios con un factor de potencia 0,856 en retraso. Hallar el valor de Z . *Sol.* $Z = 1 \angle 90^\circ \Omega$.
- 7-26 El circuito serie de la Fig. 7-24 consume 300 vatios con un factor de potencia 0,6 en retraso. Hallar la impedancia desconocida y determinar el triángulo de potencias. *Sol.* $Z = 4 \angle 90^\circ \Omega$; $S = 300 + j400$ VA.
- 7-27 El fasor de tensión aplicado a dos impedancias $Z_1 = 4 \angle -30^\circ$ ohmios y $Z_2 = 5 \angle 60^\circ$ ohmios en paralelo es $V = 20 \angle 0^\circ$ voltios. Determinar el triángulo de potencias de cada rama así como el triángulo de potencias total mediante combinación de los anteriores. *Sol.* $P = 126,6$ W; $Q = 19,3$ VAR en retraso; f.p. = 0,99 en retraso.
- 7-28 El valor de la tensión eficaz aplicada a un circuito formado por $R = 10$ ohmios y $Z = 8 \angle -30^\circ$ ohmios en paralelo es de 5 amperios. Determinar el triángulo de potencias total. *Sol.* $P = 110$ W; $Q = 33$ VAR en adelanto; f.p. = 0,957 en adelanto.

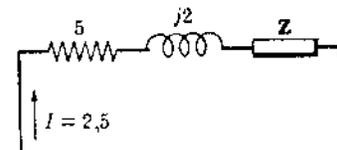


Fig. 7-23

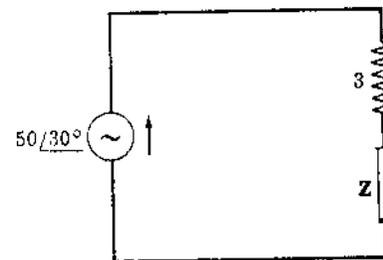


Fig. 7-24

7-29 Hallar la potencia activa total y el factor de potencia del circuito paralelo de la Fig. 7-25 sabiendo que la potencia reactiva de la rama 1 es 8 kilovoltios-ampereos reactivos. *Sol.* 8 kW; f.p. = 0,555 en retraso.

7-30 ¿Qué lectura indicará el amperímetro del circuito de la Fig. 7-26 si el consumo de la rama 2 es 1490 voltios-ampereos? Determinar el triángulo de potencias.

Sol. 42,4 A; $S = 2210 + j3630$ VA; f.p. = 0,521 en retraso.

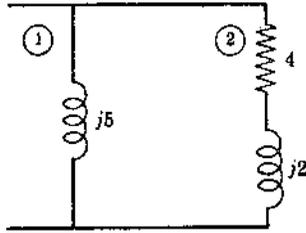


Fig. 7-25

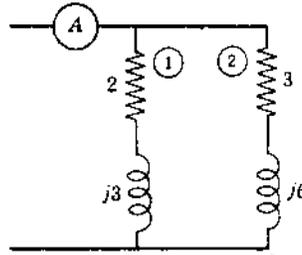


Fig. 7-26

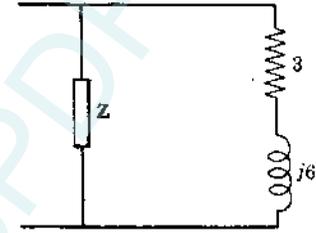


Fig. 7-27

7-31 En el circuito paralelo de la Fig. 7-27 la resistencia de 3 ohmios consume 666 vatios y el circuito total 3370 voltios-ampereos con un factor de potencia 0,937 en adelanto. Hallar el valor de Z.

Sol. $Z = 2 - j2 \Omega$.

7-32 La potencia total consumida por el circuito de la Fig. 7-28 es 1500 vatios. Determinar el triángulo de potencias.

Sol. $S = 1500 + j2480$ VA; f.p. = 0,518 en retraso.

7-33 Hallar la potencia disipada en cada una de las resistencias del circuito de la Fig. 7-29 sabiendo que la potencia total es de 2000 vatios. *Sol.* $P_{15} = 724$ W; $P_8 = 1276$ W.

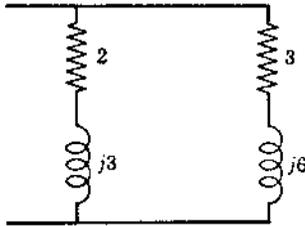


Fig. 7-28

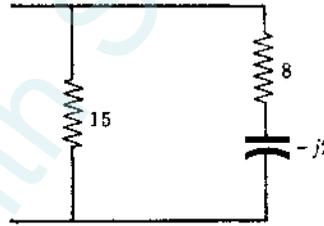


Fig. 7-29

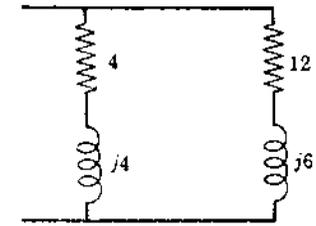


Fig. 7-30

7-34 La potencia reactiva Q del circuito de la Fig. 7-30 es de 2500 voltios-ampereos reactivos en retraso. Determinar el triángulo de potencias completo. *Sol.* $S = 3920$ VA; $P = 3020$ W; f.p. = 0,771 en retraso.

7-35 Hallar el factor de potencia del circuito de la Fig. 7-31. Se sustituye la resistencia de 6 ohmios por otra de manera que el factor de potencia total sea 0,9 en retraso; ¿cuál será este nuevo valor óhmico?

Sol. f.p. = 0,8 en retraso; $R = 3,22 \Omega$.

7-36 En el circuito de la Fig. 7-32 el valor de la carga es $Z = 5 + j8,66$ ohmios. Calcular el tanto por ciento de disminución de la intensidad total al añadir el condensador de $-j20$ ohmios de capacitancia en paralelo con la carga. *Sol.* 38 %.

7-37 Hallar la capacidad C del condensador necesario para que el factor de potencia del circuito paralelo de la Figura 7-33 sea 0,95 en retraso. *Sol.* $C = 28,9 \mu\text{F}$.

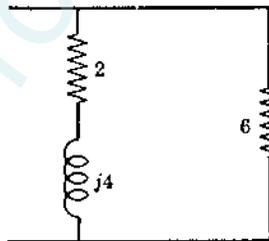


Fig. 7-31

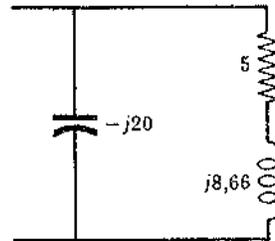


Fig. 7-32

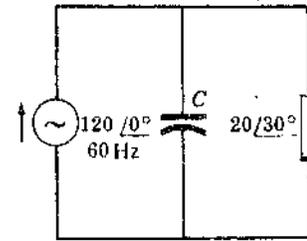


Fig. 7-33

7-38 Una fuente a 60 hertzios y 240 voltios de tensión eficaz suministra 4500 voltios-ampereos a una carga con un factor de potencia 0,75 en retraso. Hallar la capacidad del condensador que ha de colocarse en paralelo con la carga para que el factor de potencia sea (a) 0,9 en retraso, (b) 0,9 en adelanto. *Sol.* (a) 61,3 μF ; (b) 212 μF .

- 7-39 En el apartado (a) del Problema 7-38, ¿en qué tanto por ciento disminuye la intensidad de corriente? ¿Existe alguna reducción más en el apartado (b)? *Sol.* 16,7%. No, la corriente es la misma.
- 7-40 Tres impedancias $Z_1 = 20/30^\circ$ ohmios, $Z_2 = 15/-45^\circ$ ohmios y $Z_3 = 10/0^\circ$ ohmios están asociadas en paralelo con una fuente de tensión $V = 100/-45^\circ$ voltios. Determinar el triángulo de potencias de cada rama, así como la suma de los tres para obtener el triángulo de potencias total.
Sol. $P = 1904$ W; $Q = 221$ VAR en adelante; $S = 1920$ VA; f.p. = 0,993 en adelante.
- 7-41 En el Problema 7-40 la fuente de 100 voltios suministra 1920 voltios-amperios, con un factor de potencia 0,993 en adelante, a las tres ramas en paralelo del circuito. Hallar la intensidad de corriente total en el circuito.
Sol. 19,2 A; en adelante $6,62^\circ$ respecto de V.
- 7-42 Una fuente de tensión $V = 240/-30^\circ$ voltios alimenta tres impedancias $Z_1 = 25/15^\circ$ ohmios, $Z_2 = 15/-60^\circ$ ohmios y $Z_3 = 15/90^\circ$ ohmios en paralelo. Determinar el triángulo de potencias para cada rama, así como el correspondiente a la combinación de los tres.
Sol. $P = 4140$ W; $Q = 1115$ VAR en retraso; $S = 4290$ VA; f.p. = 0,967 en retraso.
- 7-43 Determinar el triángulo de potencias total para las siguientes cargas: carga 1, de 5 kilovatios con un factor de potencia 0,8 en retraso; carga 2, de 4 kilovoltios-amperios con una potencia Q de 2 kilovoltios-amperios reactivos, y carga 3, de 6 kilovoltios-amperios con un factor de potencia 0,9 en retraso.
Sol. $P = 13,86$ kW; $Q = 4,38$ kVAR en retraso; $S = 14,55$ kVA; f.p. = 0,965 en retraso.
- 7-44 Determinar el triángulo de potencias total para las siguientes cargas: carga 1, de 200 voltios-amperios con un factor de potencia 0,7 en retraso; carga 2, de 350 voltios-amperios con un factor de potencia 0,5 en retraso, y carga 3, de 275 voltios-amperios con un factor de potencia igual a la unidad.
Sol. $P = 590$ W; $Q = 446$ VAR en retraso; $S = 740$ VA; f.p. = 0,798 en retraso.
- 7-45 Mediante la conexión de unos condensadores se modifica el factor de potencia de una carga de 300 kilovatios desde 0,65 en retraso a 0,90 en retraso. Calcular la potencia reactiva de los condensadores necesarios para obtener dicha modificación y el tanto por ciento en que disminuye la potencia aparente. *Sol.* 204 kVAR; 28%.
- 7-46 El factor de potencia de una carga industrial de 25 kilovoltios-amperios es 0,8 en retraso. En la planta se instala un grupo de resistencias de calefacción con lo cual se eleva el factor de potencia a 0,85 en retraso. Hallar la potencia activa instalada. *Sol.* 4,3 kW.
- 7-47 Una carga de motores de inducción de 1500 vatios y factor de potencia 0,75 en retraso se combina con la de un grupo de motores sincronos de 500 voltios-amperios y factor de potencia 0,65 en adelante. Calcular la potencia reactiva de los condensadores a instalar para que el factor de potencia de los dos grupos motores sea 0,95 en retraso. ¿En qué tanto por ciento disminuye la potencia aparente? *Sol.* 347 VAR; 6,3%.
- 7-48 El factor de potencia de una cierta carga se corrige mediante 20 kilovoltios-amperios reactivos de una asociación de condensadores al valor 0,9 en retraso. Si la potencia aparente que resulta es 185 kilovoltios-amperios, determinar el triángulo de potencias de la carga antes de la conexión.
Sol. $P = 166,5$ kW; $Q = 101,0$ kVAR en retraso; f.p. = 0,856 en retraso.
- 7-49 Una carga de motores de inducción con una potencia aparente de 2000 voltios-amperios y un factor de potencia 0,80 en retraso se combina con otra carga de 500 voltios-amperios de motores sincronos. Hallar el factor de potencia de estos motores sincronos sabiendo que el factor de potencia total es 0,90 en retraso.
Sol. 0,92 en adelante.
- 7-50 Una carga de potencia aparente de 65 kilovoltios-amperios con un factor de potencia en retraso se conecta a un grupo de motores sincronos de 25 kilovoltios-amperios con un factor de potencia 0,6 en adelante. Hallar el factor de potencia de la carga de 65 kilovoltios-amperios sabiendo que el factor de potencia total es 0,85 en retraso. *Sol.* 0,585.
- 7-51 Un transformador de 100 kilovoltios-amperios trabaja al 80% de plena carga con un factor de potencia 0,85 en retraso. ¿Qué potencia aparente de carga con 0,6 de factor en retraso se le puede añadir sin sobrepasar la plena carga del transformador? *Sol.* 21,3 kVA.
- 7-52 Un transformador de 250 kilovoltios-amperios trabaja a plena carga con un factor de potencia 0,8 en retraso. Mediante una batería de condensadores en paralelo se corrige el factor de potencia al valor 0,9 en retraso. (a) Hallar la potencia reactiva de los condensadores necesarios. (b) ¿Qué potencia activa de una nueva carga se le puede añadir sin exceder el límite de la potencia aparente del transformador?
Sol. 52,5 kVAR; 30 kW.
- 7-53 Después de instalar la batería de condensadores del Problema 7-5, se añade otra carga con un factor de potencia 0,5 en retraso. Hallar la potencia aparente de esta nueva carga sin sobrepasar el límite de la potencia aparente del transformador. *Sol.* 32 kVA.