

Capítulo 8

Resonancia serie y paralelo

INTRODUCCION

Un circuito está, o entra, en resonancia cuando la tensión aplicada y la intensidad de corriente que circula están en fase. En resonancia, pues, la impedancia compleja del circuito se reduce exclusivamente a una resistencia pura R .

Como V e I están en fase, el factor de potencia de un circuito resonante es la unidad.

RESONANCIA DE UN CIRCUITO SERIE RLC

La impedancia compleja del circuito serie de la Fig. 8-1 es $Z = R + j(\omega L - 1/\omega C) = R + jX$. Dicho circuito entra en resonancia cuando $X = 0$, es decir, cuando $\omega L = 1/\omega C$ o bien $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$. Ahora bien, $\omega = 2\pi f$, con lo que la frecuencia de resonancia viene dada por

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ Hz (o c.p.s.)}$$

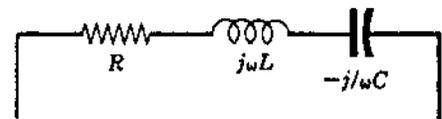


Fig. 8-1

En la Fig. 8-2(a) se representa el valor de Z y el de sus tres componentes R , X_L y X_C en función de la pulsación ω . Para $\omega = \omega_0$, las reactancias inductiva y capacitiva son iguales, y como $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$ se deduce que $Z = R$. Es decir, la impedancia de un circuito serie en resonancia es mínima. En consecuencia, la intensidad de corriente, $I = V/Z$, es máxima en dichas condiciones.

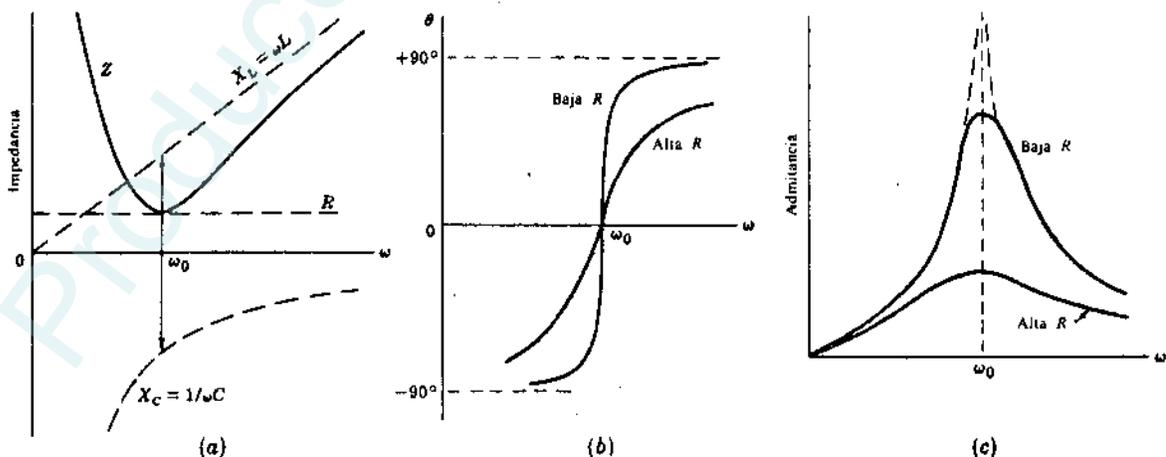


Fig. 8-2. Circuito serie: Valores de Z , θ e Y en función de ω

Para frecuencias inferiores a la correspondiente a ω_0 la reactancia capacitiva es mayor que la inductiva, con lo que el ángulo de la impedancia es negativo. Si la resistencia es pequeña, la variación del ángulo con la pulsación es mucho más rápida, como indica la Fig. 8-2(b). Cuando ω tiende hacia cero, el ángulo de Z se aproxima a -90° .

Para frecuencias superiores a la correspondiente a ω_0 , la reactancia inductiva es mayor que la capacitiva, con lo que el ángulo de Z es positivo, aproximándose a $+90^\circ$ cuando $\omega \gg \omega_0$.

En la Fig. 8-2(c) se representa la admitancia del circuito serie $Y = 1/Z$ en función de ω . Como $I = VY$, este diagrama muestra, asimismo, la variación de la intensidad de corriente con ω . Puede observarse que para la pulsación ω_0 la corriente es máxima y que en resistencias pequeñas la intensidad de corriente es mayor. La curva de puntos representa el caso límite en que $R = 0$. No se representa el ángulo de la admitancia, ya que es el opuesto (igual y de signo contrario) del ángulo de la impedancia que muestra la Figura 8-2(b).

RESONANCIA DE UN CIRCUITO PARALELO RLC

El circuito paralelo de la Fig. 8-3 es un circuito ideal formado por tres ramas con elementos simples R, L y C . Sin embargo, el análisis de este circuito presenta un enorme interés en el estudio general de la resonancia. Este circuito paralelo ideal se puede reducir al circuito serie que acabamos de ver sin más que establecer la dualidad completa existente entre ambos.

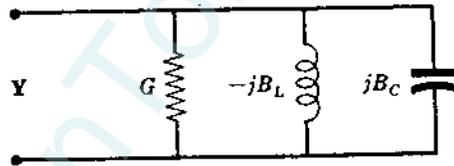


Fig. 8-3

La admitancia compleja del circuito paralelo de la Fig. 8-3 es $Y = G + j(\omega C - 1/\omega L) = G + jB$, siendo $B = B_C - B_L$, $B_C = \omega C$ y $B_L = 1/\omega L$. Dicho circuito entra en resonancia cuando $B = 0$, es decir, cuando $\omega C = 1/\omega L$ o bien $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$. Al igual que en el circuito serie RLC, la frecuencia de resonancia viene dada por

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ Hz (o c.p.s.)}$$

En la Fig. 8-4(a) se representa el valor de Y y el de sus tres componentes G, B_C y B_L en función de ω . Para $\omega = \omega_0$, las susceptancias inductiva y capacitiva son iguales, con lo que $Y = G$. Es decir, la admitancia de un circuito paralelo en resonancia es mínima. En consecuencia, la intensidad de corriente, $I = VY$, también es mínima en estas condiciones.

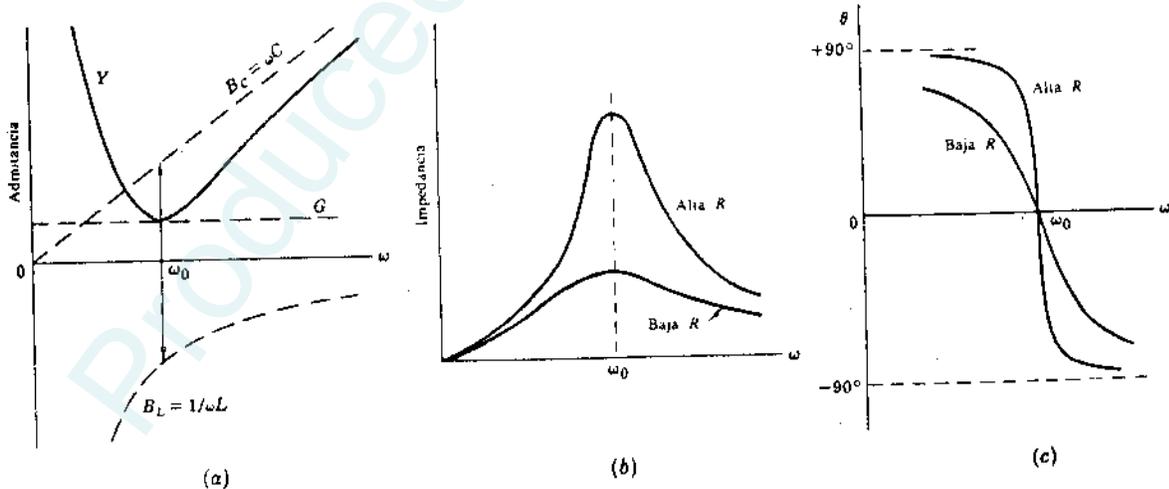


Fig. 8-4. Circuito paralelo: Valores de Y, Z y θ en función de ω

Para frecuencias inferiores a la correspondiente a ω_0 la susceptancia inductiva es mayor que la capacitiva, con lo que el ángulo de Y es negativo. En este caso, el ángulo de la impedancia es positivo y se aproxima a $+90^\circ$ cuando ω tiende a cero [véase Figura 8-4(c)].

Para frecuencias superiores a la correspondiente a ω_0 el ángulo de Z es negativo y su variación con ω es más rápida para resistencias elevadas.

RESONANCIA DE UN CIRCUITO PARALELO DE DOS RAMAS

La admitancia Y del circuito paralelo de dos ramas de la Figura 8-5 es la suma de las admitancias individuales de cada una de ellas.

$$Y = Y_L + Y_C = \frac{1}{R_L + jX_L} + \frac{1}{R_C - jX_C}$$

$$= \left(\frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + X_C^2} \right) + j \left(\frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} - \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} \right)$$

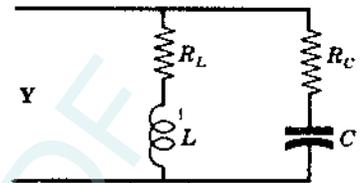


Fig. 8-5

El circuito entra en resonancia cuando la admitancia compleja sea un número real. Es decir, $X_C/(R_C^2 + X_C^2) = X_L/(R_L^2 + X_L^2)$, y

$$\frac{1}{\omega_0 C} (R_L^2 + \omega_0^2 L^2) = \omega_0 L (R_C^2 + 1/\omega_0^2 C^2) \quad (1)$$

Para conseguir la resonancia se puede actuar sobre cualquiera de las cinco magnitudes que aparecen en (1).

Despejando ω_0 de la Ecuación (1) resulta,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}} \quad (2)$$

Por tanto, la pulsación ω_0 de un circuito resonante paralelo de dos ramas difiere de la correspondiente al circuito simple formado por los tres elementos R , L y C en paralelo en el factor $\sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}}$.

La frecuencia es un número real y positivo; por consiguiente, el circuito tendrá una frecuencia de resonancia correspondiente a ω_0 para $R_L^2 > L/C$ y $R_C^2 > L/C$ o bien $R_L^2 < L/C$ y $R_C^2 < L/C$. Cuando $R_L^2 = R_C^2 = L/C$ el circuito entra en resonancia a todas las frecuencias. En el Problema 8-12 se aclara este importante caso especial.

Despejando L de la Ecuación (1) resulta,

$$L = \frac{1}{2} C \left[(R_C^2 + X_C^2) \pm \sqrt{(R_C^2 + X_C^2)^2 - 4R_L^2 X_C^2} \right]$$

o bien como $Z_C = \sqrt{R_C^2 + X_C^2}$,

$$L = \frac{1}{2} C \left[Z_C^2 \pm \sqrt{Z_C^4 - 4R_L^2 X_C^2} \right] \quad (3)$$

Ahora bien, si en esta Ecuación (3) $Z_C^4 > 4R_L^2 X_C^2$, se obtienen dos valores de L para los que el circuito entra en resonancia. Si $Z_C^4 = 4R_L^2 X_C^2$ el circuito entrará en resonancia para $L = \frac{1}{2} C Z_C^2$. Si $Z_C^4 < 4R_L^2 X_C^2$ no existe valor alguno de L para el cual se presente la resonancia del circuito dado.

Despejando C en la Ecuación (1) resulta,

$$C = 2L \left[\frac{1}{Z_L^2 \pm \sqrt{Z_L^4 - 4R_C^2 X_L^2}} \right] \quad (4)$$

En este caso, si $Z_L^4 > 4R_C^2 X_L^2$ habrá dos valores de C para los que el circuito entra en resonancia.

Despejando R_L en la Ecuación (1) resulta,

$$R_L = \sqrt{\omega^2 L C R_C^2 - \omega^2 L^2 + L/C} \quad (5)$$

y si despejamos R_C

$$R_C = \sqrt{R_L^2 / (\omega^2 L C) - 1/\omega^2 C^2 + L/C} \quad (6)$$

Si el subradical de (5), o de (6), es positivo, existe un solo valor de R_L , o de R_C , para el cual el circuito entra en resonancia.

FACTOR DE CALIDAD Q

El factor de calidad de una bobina, de un condensador, o de un circuito en general se define por

$$Q = 2\pi \frac{\text{energía máxima almacenada}}{\text{energía disipada por periodo}}$$

En los circuitos de la Fig. 8-6 y 8-7, la energía disipada por periodo es el producto de la potencia media disipada en la resistencia $R(I_{\max}/\sqrt{2})^2$ multiplicada por el periodo T o $1/f$.

En el circuito serie RL de la Fig. 8-6 la energía máxima almacenada es $\frac{1}{2}LI_{\max}^2$. Por tanto,

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}LI_{\max}^2}{(I_{\max}^2/2)R(1/f)} = \frac{2\pi fL}{R} = \frac{\omega L}{R}$$

En el circuito serie RC de la Fig. 8-7 la energía máxima almacenada es $\frac{1}{2}CV_{\max}^2$ o bien $\frac{1}{2}I_{\max}^2/\omega^2C$. Por consiguiente,

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}I_{\max}^2/\omega^2C}{(I_{\max}^2/2)R(1/f)} = \frac{1}{\omega CR}$$

En un circuito serie RLC en resonancia la energía almacenada es constante. Teniendo en cuenta que cuando la tensión en el condensador es máxima la intensidad de corriente por la bobina es nula, y viceversa, $\frac{1}{2}CV_{\max}^2 = \frac{1}{2}LI_{\max}^2$. Es decir,

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR}$$

La representación gráfica de la intensidad de corriente en un circuito serie RLC en función de la pulsación, o de la frecuencia, es análoga a la correspondiente de la admitancia de la Fig. 8-2(c). En la Fig. 8-8 se representa la intensidad que circula por un circuito RLC en función de ω o bien mediante un cambio de escala apropiado, en función de f . En el valor ω_0 la intensidad de corriente I_0 es máxima. Se han señalado los puntos en los que la intensidad toma el valor $0,707I_0$. Las pulsaciones correspondientes son ω_1 y ω_2 .

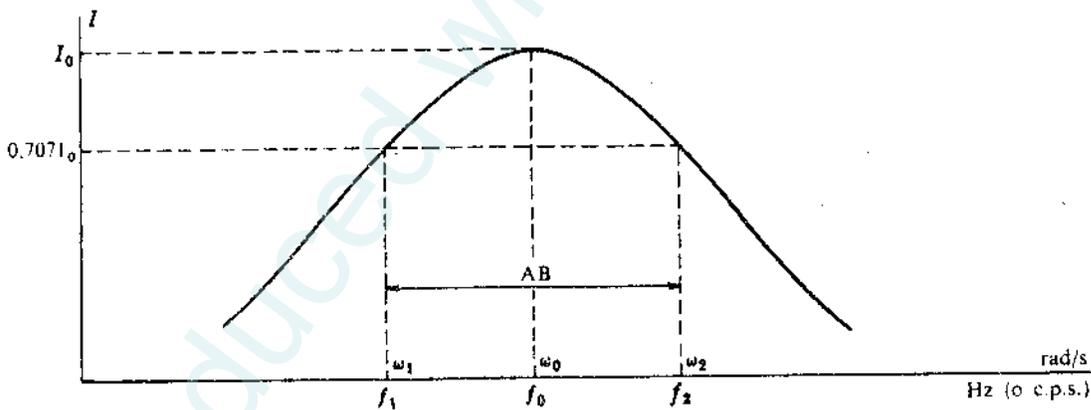


Fig. 8-8

Como la potencia consumida por el circuito es RI^2 , para $I = 0,707I_0$ la potencia es la mitad de la que corresponde al valor máximo que tiene lugar en ω_0 . Los puntos asociados a ω_1 y ω_2 se llaman puntos de potencia mitad. La distancia entre ambos puntos se mide en hertzios o ciclos por segundo (c.p.s.) y se llama ancho de banda AB .

En estas condiciones, podremos expresar el factor de calidad por la relación entre la frecuencia de resonancia y el ancho de banda; es decir (véase Problema 8-13),

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{f_0}{AB}$$

La pulsación de resonancia ω_0 es la media geométrica de ω_1 y ω_2 (véase Problema 8-6):

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad \text{y} \quad f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$$

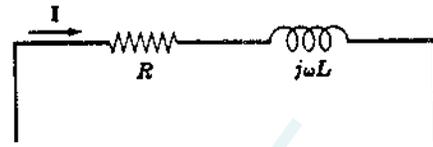


Fig. 8-6

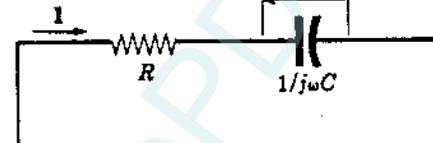


Fig. 8-7

En resonancia, las tres ramas del circuito paralelo de la Fig. 8-9 almacenan una energía constante. Teniendo en cuenta que cuando la intensidad de corriente por la bobina es máxima la tensión en el condensador es nula, y viceversa, podremos escribir $\frac{1}{2}LI_{\max}^2 = \frac{1}{2}CV_{\max}^2$. Es decir,

$$Q_0 = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 CR$$



Fig. 8-9

LUGARES GEOMETRICOS DE IMPEDANCIAS

El estudio de los circuitos que tienen un elemento variable se simplifica mucho mediante el análisis de los lugares geométricos de impedancias. Como $I = VY$ y, normalmente, V es constante, el lugar geométrico de Y proporciona la variación de la intensidad I con el elemento variable del circuito.

El circuito serie de la Fig. 8-10(a) tiene una resistencia fija y una reactancia variable que podemos suponer toma valores cualesquiera, positivos o negativos. Si consideramos el plano Z con los ejes cartesianos R y X , el lugar geométrico de la impedancia Z , para el circuito dado, es una recta paralela al eje X que corta al eje R en R_1 , como indica la Figura 8-10(b).

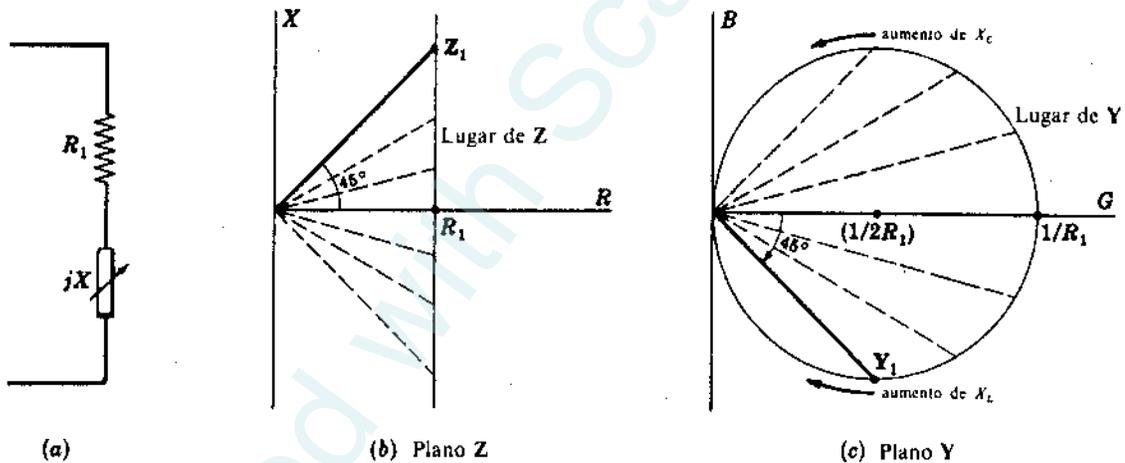


Fig. 8-10

En el plano Y , formado por los ejes cartesianos G y B , podemos determinar el lugar geométrico de la admitancia.

Como $Z = 1/Y$

$$R_1 + jX = \frac{1}{G + jB} \tag{1}$$

Racionalizando e igualando las partes reales de (1),

$$R_1 = \frac{G}{G^2 + B^2} \tag{2}$$

o bien

$$G^2 - G/R_1 + B^2 = 0 \tag{2}$$

Sumando $1/4R_1^2$ a ambos miembros de (2) y simplificando resulta,

$$\left(G - \frac{1}{2R_1}\right)^2 + B^2 = \left(\frac{1}{2R_1}\right)^2 \tag{3}$$

Esta Ecuación (3) representa una circunferencia, es decir, el lugar geométrico de Y es una circunferencia con centro el punto $(1/2R_1, 0)$ y radio $1/2R_1$. [Véase Figura 8-10(c).]

A cada punto del lugar geométrico de Z le corresponde un punto del lugar geométrico de Y . Los puntos del lugar de Z por encima del eje R se corresponden con los puntos de la semicircunferencia por debajo del eje G en el plano Y . Al punto $+\infty$ del lugar de Z le corresponde el origen del plano Y . Análogamente, los puntos del lugar geométrico de Z por debajo del eje R se corresponden con los puntos de la semicircunferencia por encima del eje G en el plano Y . Al punto $-\infty$ del lugar de Z le corresponde el origen en el plano Y . Conviene observar las posiciones relativas de Z_1 e Y_1 . Las distancias de Z_1 e Y_1 a los orígenes respectivos son distintas, mientras que los ángulos que forman con el eje horizontal son iguales y de signo contrario.

En el caso de una reactancia inductiva fija y una resistencia variable, como indica la Fig. 8-11(a), el lugar geométrico de Z es una semirrecta horizontal situada en el primer cuadrante del plano Z a una distancia $X = X_{L_1}$ del origen. Por el mismo procedimiento que antes se obtiene la ecuación del lugar geométrico de Y :

$$G^2 + (B + 1/2X_{L_1})^2 = (1/2X_{L_1})^2 \tag{4}$$

El lugar geométrico de Y es, pues, una circunferencia de centro $(0, -1/2X_{L_1})$ y radio $1/2X_{L_1}$ en el plano Y . [Véase Fig. 8-11(c).] Sin embargo, como el lugar geométrico de Z , en la Fig. 8-11(b), es una semirrecta del primer cuadrante del plano Z el transformado del lugar geométrico de Z , para este circuito, es únicamente la semicircunferencia del cuarto cuadrante del plano Y .

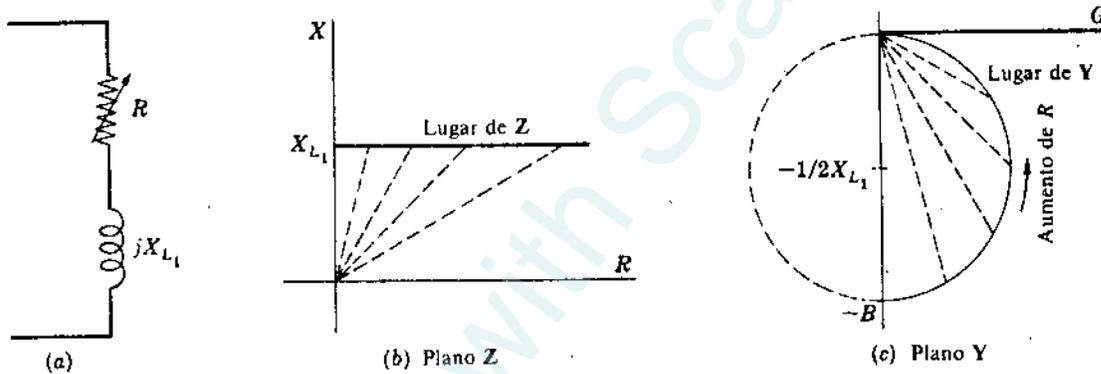


Fig. 8-11

En el caso de una reactancia capacitiva fija en serie con una resistencia variable, como indica la Fig. 8-12(a), el lugar geométrico de Z es una semirrecta horizontal situada en el cuarto cuadrante del plano Z a una distancia $X = -X_{C_1}$ del origen. [Véase Fig. 8-12(b).] Por el mismo procedimiento que antes se obtiene la ecuación del lugar geométrico de Y :

$$G^2 + (B - 1/2X_{C_1})^2 = (1/2X_{C_1})^2 \tag{5}$$

El lugar geométrico de Y es, pues, una semicircunferencia de centro $(0, 1/2X_{C_1})$ y radio $1/2X_{C_1}$, situada en el primer cuadrante del plano Y . [Véase Figura 8-12(c).]

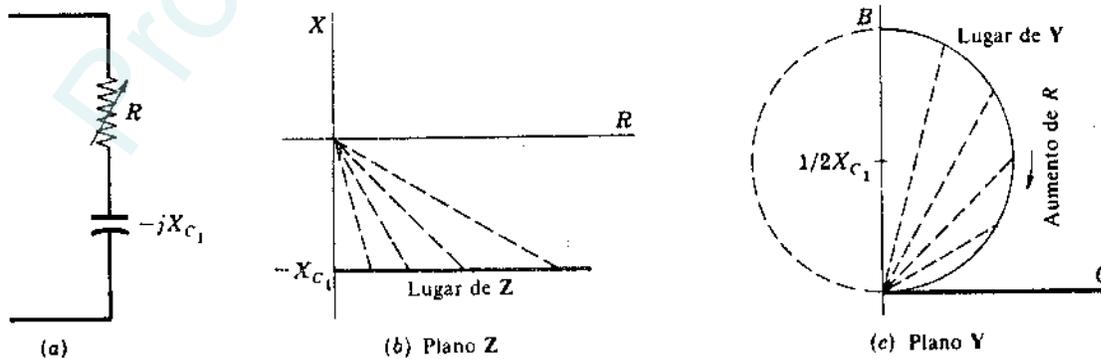


Fig. 8-12

LUGARES GEOMETRICOS DE INTENSIDADES DE CORRIENTE

Consideremos el circuito paralelo de la Fig. 8-13(a) con una rama constituida por la resistencia R_1 y reactancia jX_L fijas, y una resistencia R_2 fija y reactancia $-jX_C$ variable en la otra. La admitancia total de las dos ramas en paralelo es

$$Y_T = Y_1 + Y_2$$

Sumando el lugar de Y_2 de la segunda rama al punto fijo Y_1 se obtiene el lugar de Y_T , como muestra la Figura 8-13(b).

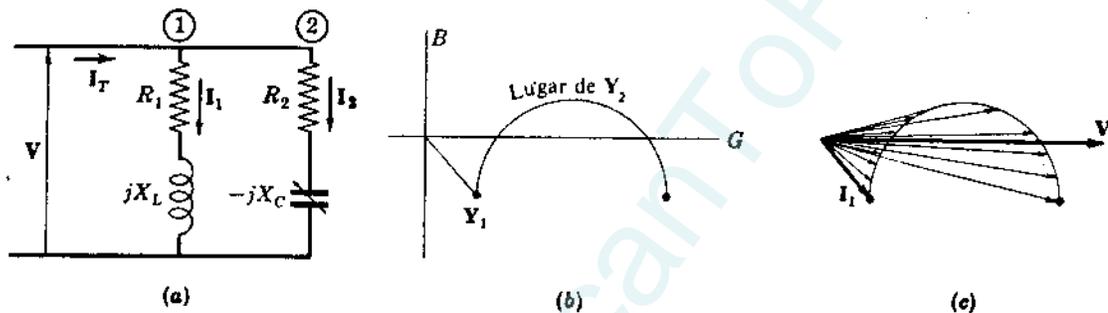


Fig. 8-13

La intensidad de corriente viene dada por $I = VY$ y, en la Fig. 8-13(c), puede observarse cómo al sumar la intensidad fija I_1 a la corriente variable I_2 se obtiene el lugar geométrico de la intensidad total. Este diagrama muestra que existen dos valores de C para los cuales la intensidad de corriente total está en fase con la tensión V .

Examinando la Fig. 8-13(c) se desprende cómo se puede dar el caso de que no exista ningún valor de C para el que el circuito entre en resonancia. Si el radio, $1/2R_2$, de la semicircunferencia del lugar es tal que la curva no corta al eje V , no existirá ningún valor de C que produzca resonancia. En los problemas que siguen veremos más aplicaciones de estos diagramas de lugares geométricos.

Problemas resueltos

- 8-1** En un circuito serie RLC , $R = 10$ ohmios, $L = 5$ milihenrios y $C = 12,5$ microfaradios. Deducir la variación del módulo y del argumento de la impedancia del circuito en función de ω en el intervalo $0,8\omega_0$ a $1,2\omega_0$.

En resonancia,

$$\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{(5 \times 10^{-3})(12,5 \times 10^{-6})} = 4000 \text{ rad/s}$$

$$X_{L_0} = \omega_0 L = 4000(5 \times 10^{-3}) = 20 \Omega$$

$$X_{C_0} = 1/\omega_0 C = 1/(4000 \times 12,5 \times 10^{-6}) = 20 \Omega$$

Entonces,
$$Z_0 = R + j(X_{L_0} - X_{C_0}) = 10 + j(20 - 20) = 10/\underline{0^\circ}$$

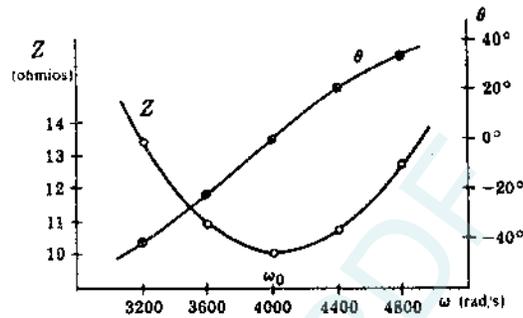
Ahora bien, $X_L = \omega L$ y $X_C = 1/\omega C$, con lo que $X_L/X_{L_0} = \omega/\omega_0$ y $X_C/X_{C_0} = \omega_0/\omega$. Por consiguiente, podremos calcular los valores de X_L , X_C y Z para otras frecuencias.

En la Fig. 8-14(a) se da una tabla de reactancias e impedancias, y en la Fig. 8-14(b) se encuentra el diagrama pedido.

www.

ω	X_L	X_C	Z	
3200	16	25	$10 - j9$	$13,4 / -42^\circ$
3600	18	22,2	$10 - j4,2$	$10,8 / -22,8^\circ$
4000	20	20	10	$10 / 0^\circ$
4400	22	18,2	$10 + j3,8$	$10,7 / 20,8^\circ$
4800	24	16,7	$10 + j7,3$	$12,4 / 36,2^\circ$

(a)



(b)

Fig. 8-14

8-2 Al circuito serie del Problema 8-1 se le aplica una tensión $V = 100/0^\circ$ voltios. Hallar la caída de tensión en cada elemento para $\omega = 3600, 4000$ y 4400 radianes por segundo. Trazar los diagramas fasoriales de tensión para cada una de las frecuencias.

Para $\omega = 3600$ rad/s, $I = V/Z = (100/0^\circ) / (10,8 / -22,8^\circ) = 9,26 / 22,8^\circ$. Entonces,

$$V_R = 9,26 / 22,8^\circ (10) = 92,6 / 22,8^\circ, \quad V_L = 9,26 / 22,8^\circ (18 / 90^\circ) = 167 / 112,8^\circ,$$

$$V_C = 206 / -67,2^\circ$$

Para $\omega = 4000$ rad/s, $I = (100/0^\circ) / (10/0^\circ) = 10/0^\circ$. Entonces,

$$V_R = 100/0^\circ, \quad V_L = 10/0^\circ (20/90^\circ) = 200/90^\circ, \quad V_C = 200/-90^\circ$$

Para $\omega = 4400$ rad/s, $I = (100/0^\circ) / (10,7 / 20,8^\circ) = 9,34 / -20,8^\circ$. Entonces,

$$V_R = 9,34 / -20,8^\circ (10) = 93,4 / -20,8^\circ, \quad V_L = 9,34 / -20,8^\circ (22/90^\circ) = 206 / 69,2^\circ,$$

$$V_C = 170 / -110,8^\circ$$

En la Fig. 8-15 se representan los tres diagramas fasoriales de tensión. Obsérvese que el módulo de la tensión en cada elemento reactivo de un circuito serie próximo a la resonancia puede ser muchas veces superior al de la tensión aplicada.

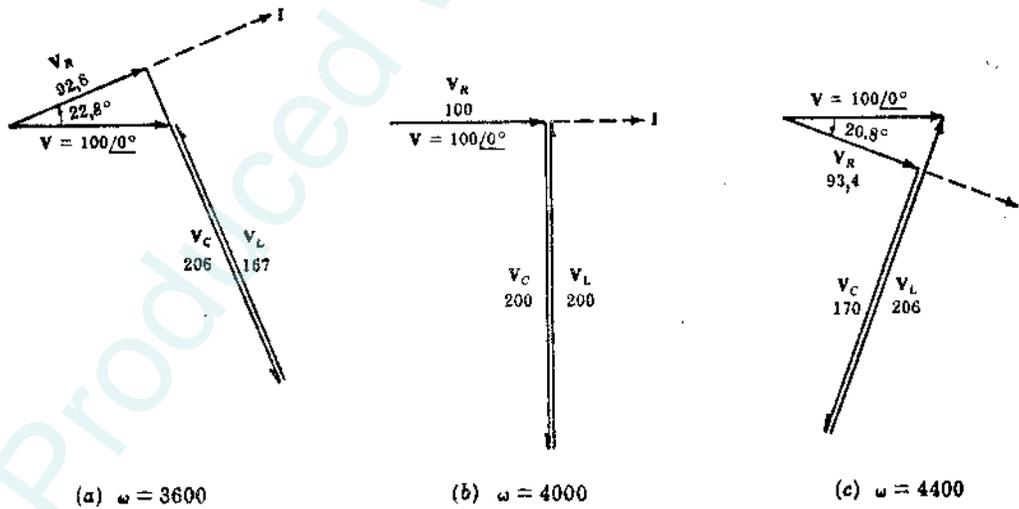


Fig. 8-15

8-3 La frecuencia de la tensión aplicada a un circuito serie de $R = 5$ ohmios, $L = 20$ milihenrios y una capacidad variable C es $f = 1000$ hertzios. Hallar el valor de C para la resonancia serie.

En resonancia, las reactancias inductiva y capacitiva son iguales, $2\pi fL = 1/2\pi fC$. Por tanto,

$$C = \frac{1}{L(2\pi f)^2} = \frac{1}{(20 \times 10^{-3})(2\pi \times 1000)^2} = 1,2 \mu\text{F}$$

- 8-4 A un circuito serie de $R = 5$ ohmios, $C = 20$ microfaradios y una bobina de autoinducción variable L se le aplica una tensión $V = 10/0^\circ$ voltios con una pulsación igual a 1000 radianes por segundo. Se ajusta el valor de L hasta que la caída de tensión en la resistencia sea máxima. Hallar las caídas de tensión en cada elemento.

Como $V_R = RI$, la caída de tensión máxima en la resistencia tendrá lugar en resonancia, esto es, cuando la intensidad de corriente es máxima. En estas condiciones, las reactancias han de ser iguales; por consiguiente,

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000(20 \times 10^{-6})} = 50 \Omega \quad X_L = 50 \Omega$$

y $Z = R = 5/0^\circ$. Ahora bien, $I = V/Z = (10/0^\circ)/(5/0^\circ) = 2/0^\circ$ con lo que

$$V_R = 2/0^\circ (5) = 10/0^\circ, \quad V_L = (2/0^\circ)(50/90^\circ) = 100/90^\circ \quad \text{y} \quad V_C = 100/-90^\circ$$

- 8-5 Hallar la frecuencia de resonancia, así como los valores de las frecuencias de media potencia de un circuito serie RLC en el que $R = 100$ ohmios, $L = 0,5$ henrios y $C = 40$ microfaradios.

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{0,5(40 \times 10^{-6})} = 224 \text{ rad/s, con lo que } f_0 = \omega_0/2\pi = 35,7 \text{ Hz (o c.p.s.).}$$

A la frecuencia inferior de media potencia, ω_1 , la reactancia capacitiva es mayor que la inductiva, la intensidad de corriente es 0,707 de su valor máximo, y como $I = V/Z$, $|Z|$ será 1,414 veces su valor para $\omega = \omega_0$. Ahora bien, $Z = 100$ para $\omega = \omega_0$, con lo que $|Z| = 141,4 \Omega$ para $\omega = \omega_1$. Por consiguiente, $Z = 100 - j(X_C - X_L) = 141,4/\theta$, de donde $\cos \theta = R/Z = 100/141,4 = 0,707$, $\theta = -45^\circ$. Por otro lado,

$$X_C - X_L = R \quad \text{o bien} \quad 1/\omega_1 C - \omega_1 L = R \quad (1)$$

Sustituyendo en (1) los valores dados y despejando ω_1 resulta $\omega_1 = 145 \text{ rad/s}$ y $f_1 = 145/2\pi = 23,1 \text{ Hz (o c.p.s.)}$.

A la frecuencia superior de media potencia, ω_2 , la reactancia inductiva es mayor que la capacitiva, $|Z|$ sigue valiendo $141,4 \Omega$ y $\theta = +45^\circ$. En estas condiciones,

$$X_L - X_C = R \quad \text{o bien} \quad \omega_2 L - 1/\omega_2 C = R \quad (2)$$

Sustituyendo valores en (2) y despejando ω_2 , resulta $\omega_2 = 345 \text{ rad/s}$ y $f_2 = 55 \text{ Hz (o c.p.s.)}$. Ahora bien, como ω_0 es la media geométrica de ω_1 y ω_2 ,

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = \sqrt{145 \times 345} = 224 \text{ rad/s}$$

- 8-6 Demostrar que la pulsación ω_0 de la frecuencia de resonancia de un circuito serie RLC es la media geométrica de las frecuencias inferior y superior de media potencia, ω_1 y ω_2 , respectivamente.

Como hemos visto en el Problema 8-5, $1/\omega_1 C - \omega_1 L = R$ para ω_1 , y $\omega_2 L - 1/\omega_2 C = R$ para ω_2 . Por tanto,

$$1/\omega_1 C - \omega_1 L = \omega_2 L - 1/\omega_2 C \quad (1)$$

Multiplicando por C y sustituyendo $\omega_0^2 = 1/LC$ en (1) se obtiene

$$1/\omega_1 - \omega_1/\omega_0^2 = \omega_2/\omega_0^2 - 1/\omega_2 \quad \text{o bien} \quad 1/\omega_1 + 1/\omega_2 = (\omega_1 + \omega_2)/\omega_0^2$$

de donde $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$.

- 8-7 La tensión aplicada a un circuito serie con $R = 50$ ohmios, $L = 0,05$ henrios y $C = 20$ microfaradios es $V = 100/0^\circ$ voltios a una frecuencia variable. Hallar la tensión máxima en la bobina al variar la frecuencia.

El módulo de la impedancia en función de ω es $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$. Por tanto, el módulo de la intensidad de corriente es $I = V/\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$.

El módulo de la tensión en L es

$$V_L = \omega LI = \omega LV/\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \quad (1)$$

Hallando la derivada $dV_L/d\omega$ en la ecuación (1), igualándola a cero y despejando el valor de ω , se deduce dicho ω para el que V_L es máximo.

$$\begin{aligned} \frac{dV_L}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega} \omega LV (R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2)^{-1/2} \\ &= \frac{(R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2)^{1/2} LV - \omega LV \frac{1}{2} (R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2)^{-1/2} (2\omega L^2 - 2/\omega^3 C^2)}{R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Sacando factor común $LV(R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2)^{-1/2}$ en (2), e igualando a cero el numerador resulta la ecuación

$$R^2 - 2L/C + 2/\omega^2 C^2 = 0$$

de donde
$$\omega = \sqrt{\frac{2}{2LC - R^2 C^2}} = 1/\sqrt{LC} \sqrt{\frac{2}{2 - R^2 C/L}} \tag{3}$$

Ahora bien, como $Q_0 = \omega_0 L/R = 1/\omega_0 CR$, $Q_0^2 = L/R^2 C$; sustituyendo en (3)

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{2Q_0^2}{2Q_0^2 - 1}} \tag{4}$$

Sustituyendo los valores dados en la ecuación (3),

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{2(0,05)(20 \times 10^{-6}) - (50 \times 20 \times 10^{-6})^2}} = 1414 \text{ rad/s}$$

Es decir, $X_L = \omega L = 1414(0,05) = 70,7 \Omega$, $X_C = 1/\omega C = 1/(1414 \times 20 \times 10^{-6}) = 35,4 \Omega$ y $Z = 50 + j(70,7 - 35,4) = 50 + j35,4 = 61,2/35,3^\circ \Omega$. Entonces, $I = V/Z = 100/61,2 = 1,635 \text{ A}$ y

$$V_{L(\max)} = 1,635(70,7) = 115,5 \text{ V}$$

La ecuación (4) indica que para Q grande, la tensión máxima en L ocurre cuando $\omega_0 \approx 1/\sqrt{LC}$. Para valores grandes de Q las tensiones máximas en R y C se obtienen para $\omega = \omega_0$. Para valores pequeños de Q , V_C es máxima por debajo de ω_0 y V_L lo es por encima. (Véase Problema 8-28.)

8-8 El circuito de la Fig. 8-16 representa la conexión en paralelo de un condensador y una bobina, siendo R_L la resistencia óhmica de esta última. Hallar la frecuencia de resonancia del circuito.

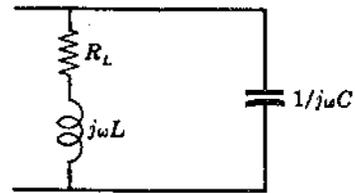


Fig. 8-16

La admitancia total del circuito es

$$\begin{aligned} Y_T &= \frac{1}{R_L + j\omega L} + j\omega C \\ &= \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2}\right) \end{aligned}$$

En resonancia, la parte imaginaria es cero; por tanto,

$$\frac{\omega_0 L}{R_L^2 + \omega_0^2 L^2} = \omega_0 C \quad \text{de donde} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R_L^2 C}{L}}$$

Si la resistencia de la bobina es pequeña comparada con $\omega_0 L$, la frecuencia de resonancia viene dada por $1/\sqrt{LC}$.

8-9 Hallar la pulsación ω_0 de la frecuencia de resonancia del circuito de dos ramas en paralelo representado en la Fig. 8-17. Si se aumenta el valor de la resistencia de la rama RC , ¿cuál será el valor máximo para el que puede existir resonancia?

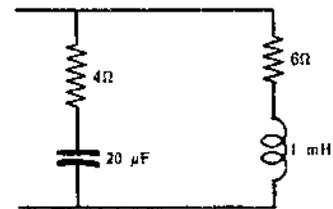


Fig. 8-17

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \times 20 \times 10^{-6}}} \sqrt{\frac{6^2 - 10^{-3}/(20 \times 10^{-6})}{4^2 - 10^{-3}/(20 \times 10^{-6})}} \\ &= 4540 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

El valor del numerador del subradical es $36 - 50 = -14$. Por tanto, dicho subradical tiene una raíz real si el denominador es negativo, es decir, si $R_C^2 < L/C$ o bien $R_C < 7,07 \Omega$. Cuando R_C tienda a $7,07 \Omega$, la pulsación ω_0 tiende a infinito.

Si lo que se aumenta es el valor de R_L , la pulsación ω_0 tiende hacia cero cuando R_L se aproxima a $7,07 \Omega$.

- 8-10** Hallar los valores de L para los que la pulsación de la frecuencia de resonancia del circuito de la Fig. 8-18 es $\omega = 5000$ radianes por segundo.

La admitancia total es

$$Y = \frac{1}{2 + jX_L} + \frac{1}{5 - j10}$$

$$= \left(\frac{2}{4 + X_L^2} + \frac{5}{125} \right) + j \left(\frac{10}{125} - \frac{X_L}{4 + X_L^2} \right)$$

Igualando a cero la parte imaginaria,

$$10/125 = X_L/(4 + X_L^2) \quad \text{o bien} \quad X_L^2 - 12,5X_L + 4 = 0 \quad (1)$$

Las raíces de (1) son $X_L = 12,17$ y $X_L = 0,33$. Sustituyendo estos valores en la expresión $X_L = \omega L$, se obtienen las condiciones de resonancia del circuito, $L = 2,43$ mH y $L = 0,066$ mH.

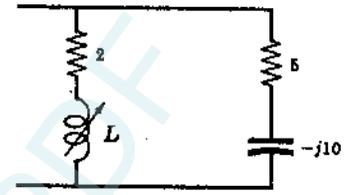


Fig. 8-18

- 8-11** Hallar el valor de C para el que entra en resonancia el circuito de la Fig. 8-19 con $\omega = 5000$ radianes por segundo.

$$Y = \frac{1}{8 + j6} + \frac{1}{8,34 - jX_C}$$

$$= \left(\frac{8}{100} + \frac{8,34}{69,5 + X_C^2} \right) + j \left(\frac{X_C}{69,5 + X_C^2} - \frac{6}{100} \right)$$

En resonancia, la admitancia compleja es un número real. Por tanto,

$$X_C/(69,5 + X_C^2) = 6/100 \quad \text{y} \quad X_C^2 - 16,7X_C + 69,5 = 0$$

de donde $X_C = 8,35 \Omega$. Sustituyendo este valor en $X_C = 1/\omega C$ y despejando C resulta $C = 24 \mu\text{F}$.

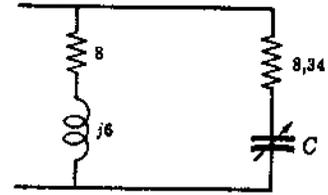


Fig. 8-19

- 8-12** Hallar el valor de R_L y R_C que hacen entrar en resonancia al circuito de la Fig. 8-20 cualquiera que sea la frecuencia.

La pulsación de la frecuencia de resonancia del circuito es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}}$$

en donde ω_0 puede tomar cualquier valor siempre $R_L^2 = R_C^2 = L/C$.
Como $L/C = (2 \times 10^{-3})/(80 \times 10^{-6}) = 25$,

$$R_L = R_C = \sqrt{25} = 5 \Omega$$

Se deja como ejercicio comprobar este resultado para valores de ω comprendidos entre 2500 y 5000 rad/s.

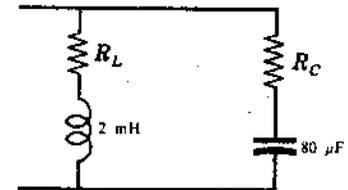


Fig. 8-20

- 8-13** Demostrar que en un circuito serie RLC el factor de calidad $Q_0 = \omega_0 L/R = f_0/AB$.

A las frecuencias de media potencia la reactancia es igual a la resistencia.

A la frecuencia inferior de media potencia la reactancia capacitiva es mayor que la inductiva. Por tanto,

$$1/2\pi f_1 C - 2\pi f_1 L = R \quad \text{de donde} \quad f_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4L/C}}{4\pi L}$$

A la frecuencia superior de media potencia la reactancia inductiva es mayor que la capacitiva. Por tanto,

$$2\pi f_2 L - 1/2\pi f_2 C = R \quad \text{de donde} \quad f_2 = \frac{R + \sqrt{R^2 + 4L/C}}{4\pi L}$$

Como $AB = f_2 - f_1$, el ancho de banda es $AB = R/2\pi L$. En resumen,

$$Q_0 = f_0/AB = 2\pi f_0 L/R = \omega_0 L/R$$

- 8-14** Hallar el valor del factor de calidad Q_0 de un circuito serie con $R = 20$ ohmios, $L = 0,05$ henrios y $C = 1$ microfaradio utilizando cada una de las siguientes expresiones para Q_0 : $\omega_0 L/R$, $1/\omega_0 CR$ y f_0/AB .

La pulsación de la frecuencia de resonancia es $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{0,05 \times 10^{-6}} = 4470$ rad/s, con lo que $f_0 = \omega_0/2\pi = 712$ Hz. Por tanto,

$$Q_0 = \omega_0 L/R = 4470(0,05)/20 = 11,2$$

o bien

$$Q_0 = 1/\omega_0 CR = 1/(4470 \times 10^{-6} \times 20) = 11,2$$

En el Problema 8-13, para la frecuencia inferior de media potencia, $1/2\pi f_1 C - 2\pi f_1 L = R$. Sustituyendo,

$$1/(2\pi f_1 \times 10^{-6}) - 2\pi f_1(0,05) = 20 \quad \text{y} \quad f_1 = 681 \text{ Hz}$$

Para la frecuencia superior de media potencia, $2\pi f_2 L - 1/2\pi f_2 C = R$. Sustituyendo, $f_2 = 745$ Hz.

Por consiguiente, $AB = (745 - 681)$ y, entonces,

$$Q_0 = f_0/AB = 712/(745 - 681) = 11,1$$

- 8-15** Obtener el lugar geométrico de la intensidad de corriente que circula por el circuito de la Figura 8-21(a) que tiene una reactancia inductiva variable X_L .

El lugar geométrico de Y es una semicircunferencia de radio $r = 1/2R = 0,1$, como indica la Figura 8-21(b).

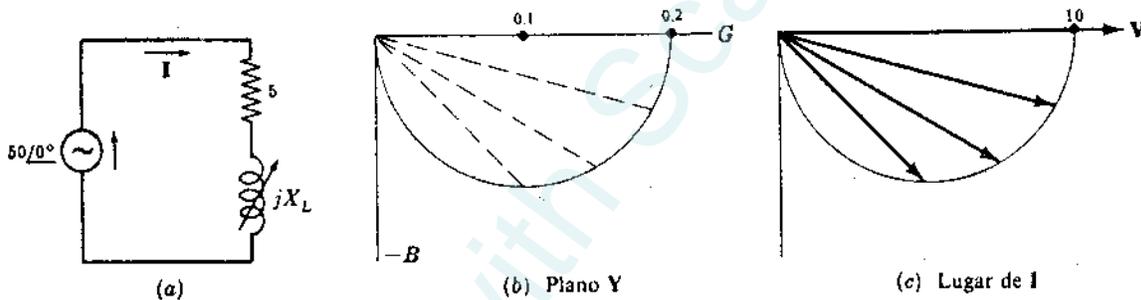


Fig. 8-21

En estas condiciones, el lugar geométrico de la intensidad de corriente se obtiene de la expresión $I = VY$, en donde $V = 50/0^\circ$ voltios. El lugar geométrico de la intensidad es análogo al correspondiente de Y y tiene un valor máximo de 10 A cuando $X_L = 0$. [Véase Figura 8-21(c).]

- 8-16** Obtener el lugar geométrico de la intensidad de corriente que circula por el circuito de la Figura 8-22(a) que tiene una resistencia variable R y una reactancia capacitiva fija.

El lugar geométrico de Y es una semicircunferencia de radio $r = 1/2X_C = 0,1$, como indica la Figura 8-22(b).

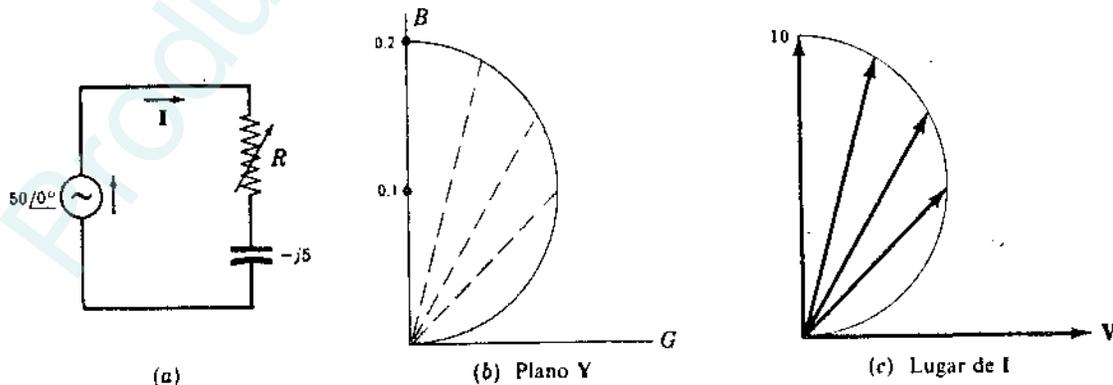


Fig. 8-22

El lugar geométrico de la intensidad de corriente se obtiene de la expresión $I = VY$, en donde $V = 50/0^\circ$ voltios. La intensidad tiene un valor máximo de 10 A para $R = 0$. [Véase Figura 8-22(c).]

- 8-17** Hallar el valor de R_L para el que existe resonancia en el circuito de la Fig. 8-23(a). Trazar el lugar geométrico de Y y explicar los resultados obtenidos.

La admitancia total es

$$Y_T = \frac{1}{R_L + j10} + \frac{1}{4 - j5} = \left(\frac{R_L}{R_L^2 + 100} + \frac{4}{41} \right) + j \left(\frac{5}{41} - \frac{10}{R_L^2 + 100} \right)$$

En resonancia, la parte imaginaria de Y debe ser nula, es decir, $5/41 = 10/(R_L^2 + 100)$, de donde $R_L^2 = -18$. Por tanto, no existe ningún valor de R_L que dé lugar a resonancia.

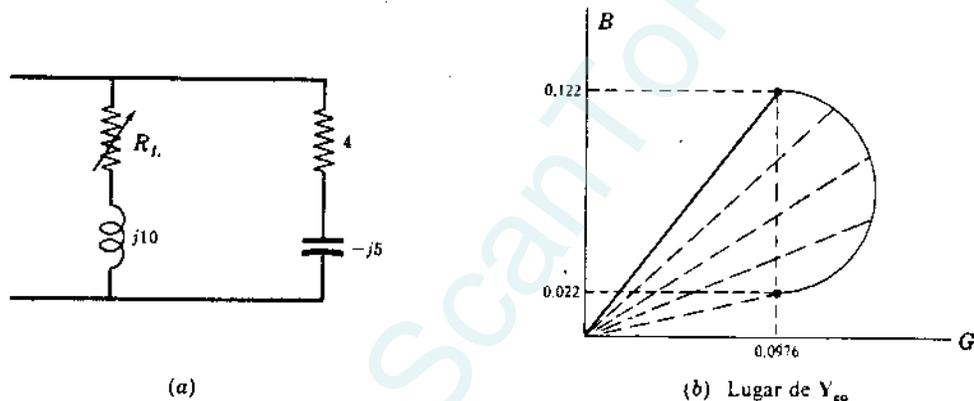


Fig. 8-23

La admitancia de la rama fija es $1/(4 - j5) = 0,0976 + j0,122$. El radio de la semicircunferencia correspondiente al lugar geométrico de esta rama variable es $r = 1/2X_L = 1/20 = 0,05$, con lo que su diámetro es 0,10. Como la susceptancia capacitiva de la rama fija es 0,122, el lugar geométrico de la rama variable no corta al eje real y, en consecuencia, no es posible el fenómeno de la resonancia.

- 8-18** Trazar el lugar geométrico de la intensidad de corriente que circula por el circuito de la Fig. 8-24(a) y hallar el valor de R_C para el que la diferencia de fase entre V e I sea de 45° .

La admitancia de la rama fija es $1/R = 0,1 \text{ U}$. El radio de la semicircunferencia del lugar geométrico de la rama RC es $r = 1/2X_C = 1/8 = 0,125$. [Véase Figura 8-24(b).]

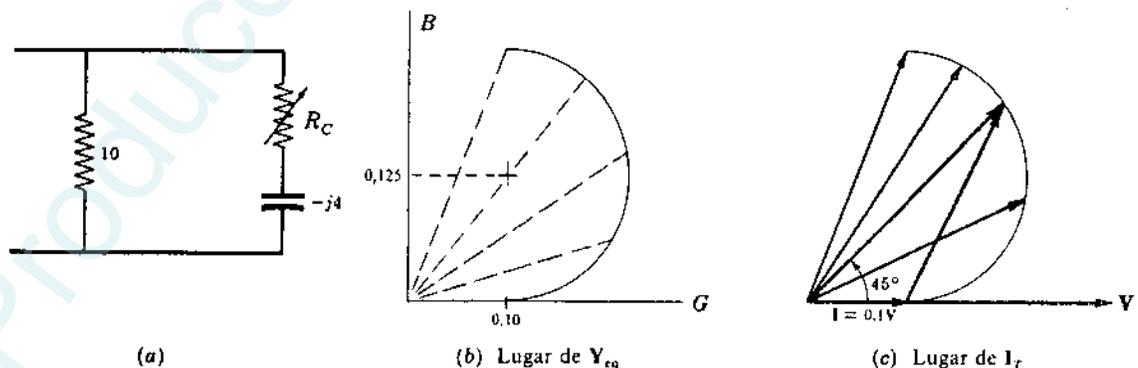


Fig. 8-24

En la Fig. 8-24(c) se observa que la intensidad está adelantada respecto de la tensión un ángulo de 45° en el punto indicado. Las partes real e imaginaria de Y_T deben ser iguales. Como

$$Y_T = \left(0,1 + \frac{R_C}{R_C^2 + 16} \right) + j \left(\frac{4}{R_C^2 + 16} \right),$$

$$0,1 + \frac{R_C}{R_C^2 + 16} = \frac{4}{R_C^2 + 16} \quad \text{de donde } R_C = 2 \text{ U}$$

8-19 En el Problema 6-18 se ha estudiado el circuito de la Fig. 8-25. Se obtuvo que el valor absoluto de V_{AB} es constante e igual a $V_{AB} = \frac{1}{2}V$, y que el fasor V_{AB} está retrasado respecto de la tensión aplicada V un ángulo 2θ , siendo $\theta = \arctg \omega L/R$. Representar gráficamente estos resultados.

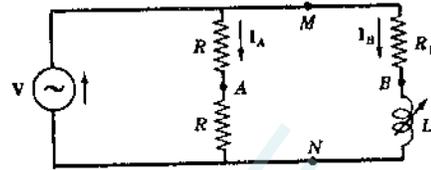


Fig. 8-25

En la primera rama, $Z = 2R$, $Y = 1/2R$ y la intensidad de corriente es $I_A = V/2R$. La caída de tensión en la resistencia es

$$V_R = IR = V/2$$



Fig. 8-26

El diagrama fasorial de la Fig. 8-26 muestra las tensiones V_{AN} y V_{MA} , siendo A el punto medio de V .

El lugar geométrico de la admitancia Y de la segunda rama es una semicircunferencia. Por tanto, el lugar geométrico de la intensidad de corriente es, asimismo, una semicircunferencia, como representa la Fig. 8-27(a). En el diagrama fasorial de tensiones aparece la caída de tensión en la bobina, V_{BN} , y la correspondiente en R_1 , V_{MB} . La tensión V es la suma de ambas caídas de tensión. Obsérvese que I_B está retrasada 90° respecto de V_{BN} .

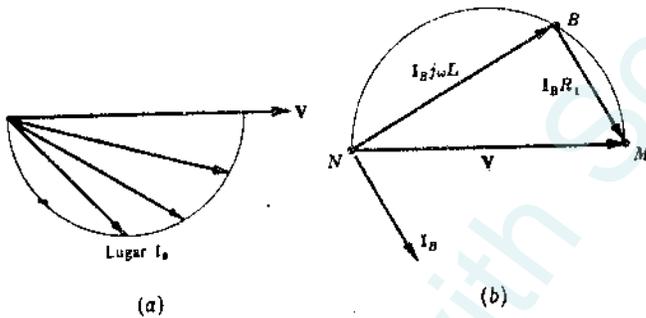


Fig. 8-27

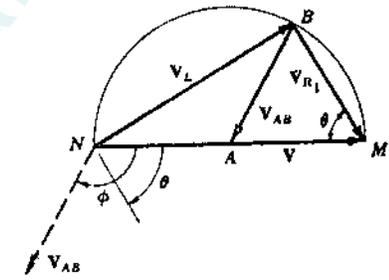


Fig. 8-28

Las tensiones V_{BN} y V_{MB} son siempre perpendiculares, cualquiera que sea el valor de L . Al variar L desde 0 hasta ∞ , el punto B se traslada de M a N por la semicircunferencia del lugar.

En la Fig. 8-28 se han superpuesto los dos diagramas fasoriales de las Figs. 8-26(b) y 8-27(b). Se puede apreciar que el radio de la semicircunferencia es V_{AB} , que vale $\frac{1}{2}V$ y que permanece constante en módulo. Además, el ángulo ϕ de retraso de V_{AB} respecto de V es igual a 2θ , en donde $\theta = \arctg \omega L/R$.

8-20 El lugar geométrico de la intensidad de corriente total que circula por un circuito paralelo de dos ramas se ha representado en la Fig. 8-29. Determinar los elementos de cada rama especificando qué elemento es variable.

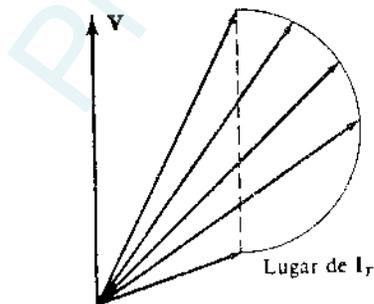


Fig. 8-29

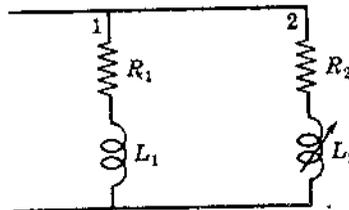


Fig. 8-30

En el punto inferior de la semicircunferencia la intensidad de corriente que circula por la rama variable es nula. Por tanto, en este punto la corriente total circularía enteramente por la rama 1 cuyos elementos son fijos. Ahora bien, esta corriente está retrasada respecto de la tensión, con lo que la rama fija deberá contener una resistencia R_1 y una bobina L_1 .

La semicircunferencia del lugar geométrico de la intensidad que circula por la rama 2 indica que la corriente está en fase con la tensión en su valor máximo. En los otros puntos del lugar, I_2 está retrasada respecto de V . Por tanto, la rama 2 contiene una resistencia R_2 y una bobina de autoinducción variable L_2 , como se indica en la Figura 8-30.

Problemas propuestos

- 8-21** La tensión aplicada al circuito serie RLC de la Fig. 8-31 es $v = 70,7 \text{ sen}(500t + 30^\circ)$ voltios y la intensidad de la corriente que circula vale $i = 2,83 \text{ sen}(500t + 30^\circ)$ amperios. Hallar los valores de R y de C .
Sol. $R = 25 \Omega$; $C = 8 \mu\text{F}$.

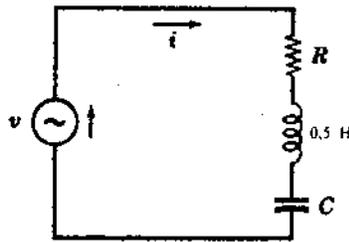


Fig. 8-31

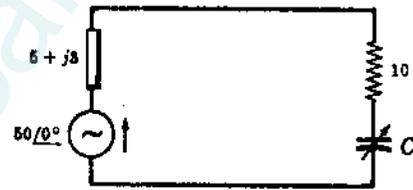


Fig. 8-32

- 8-22** En el circuito de la Fig. 8-32 la impedancia de la fuente es $5 + j3$ ohmios y su frecuencia 2000 hertzios. ¿Para qué valor de C la potencia disipada en la resistencia de 10 ohmios es máxima?
Sol. $C = 26,6 \mu\text{F}$; $P = 111 \text{ W}$.
- 8-23** El ángulo de fase de un circuito serie RLC con $L = 25$ milihenrios y $C = 75$ microfaradios a la pulsación $\omega = 2000$ radianes por segundo es de 25° en retraso. ¿A qué pulsación el ángulo de fase es de 25° en adelanto? Hallar ω_0 .
Sol. $\omega = 267 \text{ rad/s}$; $\omega_0 = 730 \text{ rad/s}$.
- 8-24** La tensión aplicada a un circuito serie RLC con $L = 0,5$ henrios es $v = 70,7 \text{ sen}(500t + 30^\circ)$ voltios y la intensidad de la corriente que circula vale $i = 1,5 \text{ sen}(500t)$ amperios. Hallar los valores de R y de C . ¿Cuál será la pulsación ω_0 de resonancia del circuito?
Sol. $R = 40,8 \Omega$; $C = 8,83 \mu\text{F}$; $\omega_0 = 476 \text{ rad/s}$.
- 8-25** A un circuito serie con $R = 10$ ohmios, $L = 0,2$ henrios y $C = 40$ microfaradios se le aplica una tensión de frecuencia variable. Calcular las frecuencias f_1 , f_0 y f_2 a las que la corriente está, respecto de la tensión, adelantada y retrasada 30° , en fase, respectivamente.
Sol. $f_1 = 54,0 \text{ Hz}$; $f_0 = 56,3 \text{ Hz}$; $f_2 = 58,6 \text{ Hz}$ (o c.p.s.).
- 8-26** El ángulo de fase de un circuito serie RLC con $R = 25$ ohmios y $L = 0,6$ henrios a una frecuencia de 40 hertzios es de 60° en adelanto. Hallar la frecuencia de resonancia del circuito.
Sol. $f_0 = 45,4 \text{ Hz}$ (o c.p.s.).
- 8-27** En el circuito serie de la Fig. 8-33 se varía la frecuencia hasta que la tensión en el condensador sea máxima. Si la tensión eficaz aplicada es de 100 voltios, calcular la tensión máxima en el condensador y la pulsación a la que tiene lugar.
Sol. $V_C = 115,5 \text{ V}$; $\omega = 707 \text{ rad/s}$.
- 8-28** El factor de calidad del circuito serie del Problema 8-27 es, como se ha visto, $Q_0 = \omega_0 L/R = 1$. Tomando el valor $R = 10$ ohmios, con lo que $Q_0 = 5$, hallar la pulsación a la cual la tensión en el condensador es máxima. Repetir el problema para $R = 5$ ohmios.
Sol. $\omega = 990; 998 \text{ rad/s}$. *Nota.* Para $Q_0 \geq 10$ se puede suponer que las tensiones máximas en R , L y C ocurren todas a la frecuencia de resonancia f_0 o pulsación ω_0 .

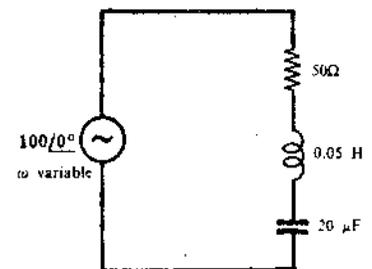


Fig. 8-33

8-29 Para poner de manifiesto el efecto del factor de calidad Q sobre el módulo de la intensidad de corriente a frecuencias próximas a la de resonancia trazar las gráficas de variación de Y con respecto a ω para los siguientes circuitos: Circuito 1: $R = 5$ ohmios, $L = 0,05$ henrios y $C = 20$ microfaradios. Circuito 2: $R = 10$ ohmios, $L = 0,05$ henrios y $C = 20$ microfaradios.

8-30 En el circuito paralelo de la Fig. 8-34, $L = 0,2$ henrios y $C = 30$ microfaradios. Hallar la pulsación de resonancia si $R_L = 0$ y compararla con la que resulta para $R = 50$ ohmios. Sol. $\omega_0 = 408$; $\omega_0 = 323$ rad/s.

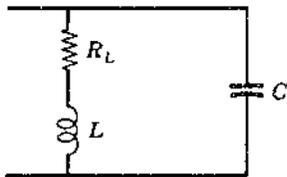


Fig. 8-34

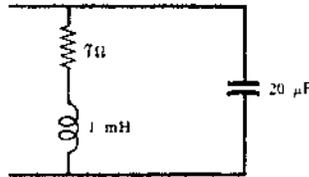


Fig. 8-35

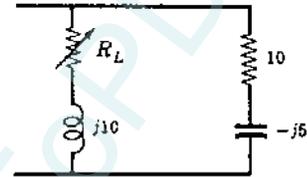


Fig. 8-36

8-31 Hallar la frecuencia de resonancia f_0 del circuito paralelo de la Figura 8-35. Sol. $f_0 = 159$ Hz (o c.p.s.).

8-32 En el Problema 8-31, ¿para qué valor de una resistencia que se colocara en serie con el condensador resultaría una frecuencia de resonancia de 300 hertzios? Sol. $R_C = 6 \Omega$.

8-33 Hallar el valor de R_L para el que el circuito paralelo de la Fig. 8-36 entra en resonancia. Sol. $R_L = 12,25 \Omega$.

8-34 ¿Para qué valor de X_L entra en resonancia el circuito paralelo de la Fig. 8-37? Trazar el lugar geométrico de Y y explicar el resultado.

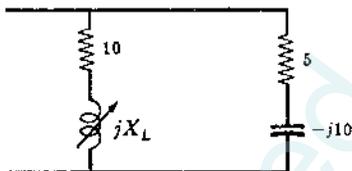


Fig. 8-37

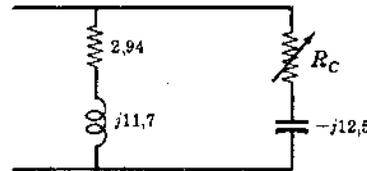


Fig. 8-38

8-35 Hallar el valor de R_C para el que el circuito paralelo de la Fig. 8-38 entra en resonancia. Trazar el lugar geométrico de Y y explicar el resultado. Sol. $R_C = 0$.

8-36 El circuito paralelo de la Fig. 8-39 entra en resonancia para $X_C = 9,68$ ohmios y $X_C = 1,65$ ohmios. Determinar el fasor intensidad de corriente total para cada valor de la reactancia capacitiva. Sol. $1,83/0^\circ$ A; $3,61/0^\circ$ A.

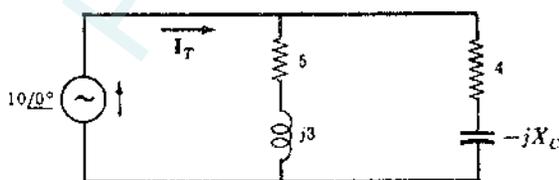


Fig. 8-39

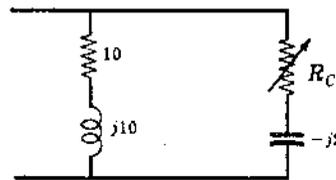


Fig. 8-40

8-37 ¿A qué valor de R_C entra en resonancia el circuito paralelo de la Figura 8-40? Sol. $R_C = 6 \Omega$.

- 8-38** La tensión aplicada a un circuito serie formado por una reactancia inductiva fija $X_L = 5$ ohmios y una resistencia variable R es $V = 50/0^\circ$ voltios. Trazar los lugares geométricos de la admitancia y de la intensidad de corriente.
- 8-39** A un circuito serie formado por una resistencia fija $R = 5$ ohmios y una capacidad variable C se le aplica la tensión $V = 50/0^\circ$ voltios. Trazar los lugares geométricos de la admitancia y de la intensidad de corriente.
- 8-40** En el circuito paralelo de la Fig. 8-41 la autoinducción de la bobina puede variar sin límites. Trazar el lugar geométrico de la admitancia y demostrar que no es posible la resonancia.

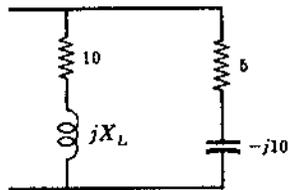


Fig. 8-41

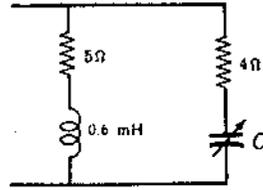


Fig. 8-42

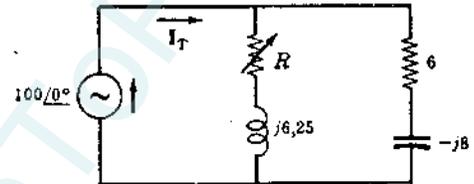


Fig. 8-43

- 8-41** El circuito de la Fig. 8-42 entra en resonancia para dos valores de la capacidad del condensador C a la pulsación $\omega = 5000$ radianes por segundo. Calcular ambos valores de C y trazar el lugar geométrico de la admitancia.
Sol. $20,6 \mu\text{F}$; $121 \mu\text{F}$.
- 8-42** En el circuito paralelo de la Fig. 8-43 la intensidad de corriente I_T está retrasada respecto de la tensión aplicada un ángulo de $53,1^\circ$ cuando $R = 0$. Si $R = \infty$ (circuito abierto), I_T adelanta el mismo ángulo respecto de la tensión. Trazar el lugar geométrico de la admitancia y explicar el resultado. ¿A qué valor de R entraría en resonancia el circuito? *Sol.* $R = 6,25 \Omega$.
- 8-43** Hallar el valor de R para que entre en resonancia el circuito paralelo de la Fig. 8-44 y trazar el lugar geométrico de la admitancia explicando el resultado.
- 8-44** En el Problema 8-43, ¿qué cambio en la reactancia inductiva hace posible la entrada en resonancia para algún valor de la resistencia variable R ? *Sol.* $X_L \leq 8,2 \Omega$.
- 8-45** Hallar el valor de R para el que entra en resonancia el circuito paralelo de la Fig. 8-45 y trazar el diagrama de su lugar geométrico. *Sol.* $R = 5,34 \Omega$.

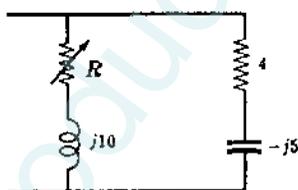


Fig. 8-44

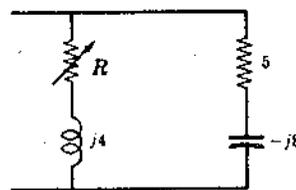


Fig. 8-45

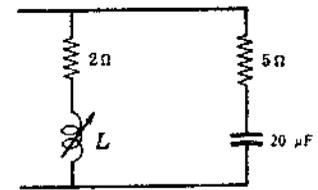


Fig. 8-46

- 8-46** En el circuito paralelo del Problema 8-11 se conseguía la resonancia variando la capacidad de C . Mediante el diagrama del lugar geométrico de la admitancia explicar por qué se obtuvo un solo valor de C en lugar de dos para la resonancia.
- 8-47** El circuito paralelo de la Fig. 8-46 se consigue entre en resonancia variando el valor la autoinducción L de la bobina. Construir el diagrama del lugar geométrico de la admitancia y determinar los valores de L para la resonancia si $\omega = 5000$ radianes por segundo. *Sol.* $L = 2,43$; $0,066 \text{ mH}$.
- 8-48** En el diagrama del lugar geométrico de la admitancia del Problema 8-47 hallar el valor de L para el cual la intensidad de corriente total es mínima. ¿Cuál será el módulo de esta intensidad si el valor eficaz de la tensión aplicada es 100 voltios? *Sol.* $L = 2,95 \text{ mH}$; $I_T = 5,1 \text{ A}$.

- 8-49 En el Problema 8-47 aplicar una tensión $V = 150/75^\circ$ voltios y obtener I_T para cada valor de L que origine la entrada en resonancia del circuito.
 Sol. $I_T = 7,98/75^\circ$; $78,9/75^\circ$ A.

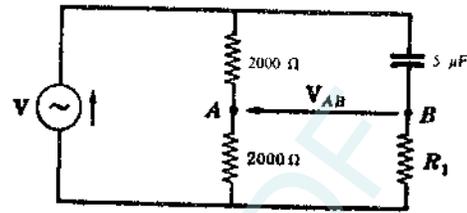


Fig. 8-47

- 8-50 En el circuito de fase variable de la Fig. 8-47 la fase de la tensión V_{AB} puede variar desde 10° hasta 170° en retraso. A la frecuencia de 60 hertzios, ¿cuál será el margen de variación de R_1 que produce la citada variación de fase?
 Sol. 46,4 a 6080 Ω .

- 8-51 En cada una de las Figs. 8-48(a), (b) y (c) se encuentran los diagramas de los lugares geométricos de las intensidades de corriente total de tres circuitos que contienen un elemento variable cada uno. Obtener el circuito a que corresponde cada uno de ellos.

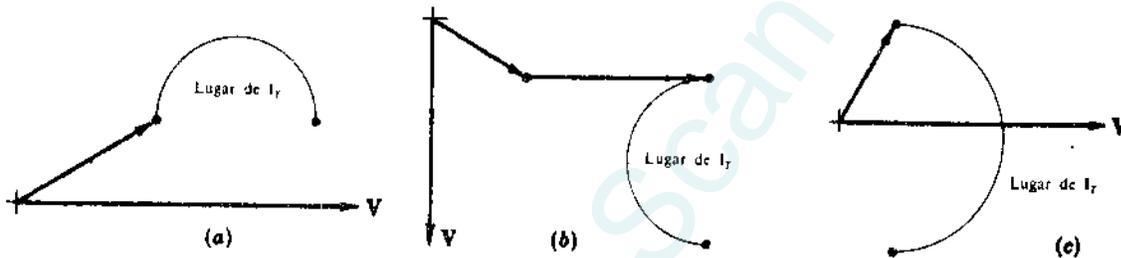


Fig. 8-48

- Sol. (a) Un circuito paralelo de dos ramas. Rama 1: R y X_C fijas; rama 2: R fija y X_C variable.
 (b) Un circuito paralelo de tres ramas. Rama 1: R y X_C fijas; rama 2: X_C fija; rama 3: R fija y X_L variable.
 (c) Un circuito paralelo de dos ramas. Rama 1: R y X_C fijas; rama 2: X_L fija y R variable.

- 8-52 Determinar el circuito correspondiente al lugar geométrico de intensidad de corriente representado en la Fig. 8-49 sabiendo que $\omega = 2000$ radianes por segundo.
 Sol. Rama 1: $R = 7,07 \Omega$; $L = 3,54$ mH.
 Rama 2: $R = 7,07 \Omega$; $C =$ variable.

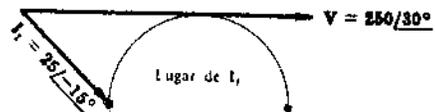


Fig. 8-49

- 8-53 En la Fig. 8-50 se encuentra el diagrama del lugar geométrico de la intensidad de corriente que circula por un circuito paralelo de dos ramas. ¿Qué cambio en la rama RL hace que el punto A se encuentre sobre el fasor tensión? Sol. $X_L = 5,78 \Omega$.

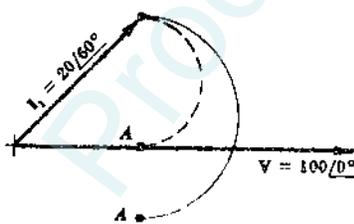


Fig. 8-50

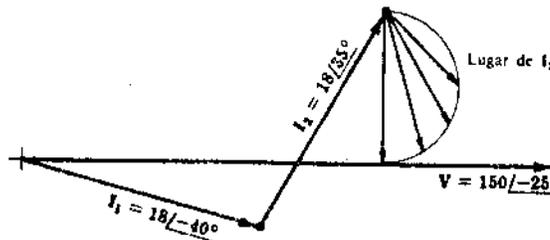


Fig. 8-51

- 8-54 En la Fig. 8-51 se encuentra el diagrama del lugar geométrico de la intensidad de corriente que circula por un circuito paralelo de tres ramas. Determinar todas las constantes del circuito sabiendo que $\omega = 5000$ radianes por segundo.
 Sol. Rama 1: $R = 8,05 \Omega$; $L = 0,423$ mH. Rama 2: $R = 4,16 \Omega$; $C = 27,7 \mu F$. Rama 3: $L = 2,74$ mH y R variable.