

Capítulo 9

Análisis de un circuito por el método de las corrientes de malla

INTRODUCCION

Las fuentes de tensión en un circuito eléctrico originan unas corrientes en las ramas que, a su vez, dan lugar a unas caídas de tensión en los componentes de las mismas. Resolver un circuito consiste en hallar las intensidades, con su sentido de circulación, en cada una de aquellas ramas o bien determinar las caídas de tensión en cada uno de dichos componentes.

METODO DE RESOLUCION POR LAS CORRIENTES DE MALLA

Para aplicar este método se eligen, en primer lugar, lazos cerrados o mallas, asignándoles una corriente eléctrica. Estos lazos o mallas se llaman *corrientes cíclicas de Maxwell* o simplemente, *corrientes de malla*, como se representa en la Fig. 9-1. Acto seguido, se escriben las ecuaciones de la segunda ley de Kirchhoff para cada malla tomando las intensidades de aquellas corrientes como variables desconocidas, I_1 , I_2 e I_3 , en el ejemplo, y se resuelve el sistema de ecuaciones así formado. La corriente en cada rama se halla mediante la primera ley de Kirchhoff y es o bien una corriente de malla (caso en que la rama solo pertenezca a una malla) o bien una combinación algebraica de dos corrientes de malla (caso en que la rama sea común a dos mallas).

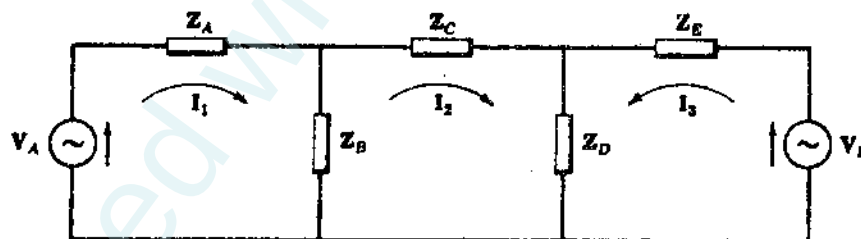


Fig. 9-1. Corrientes de malla en un circuito

Por ejemplo, la corriente en el elemento Z_A es I_1 , y la corriente en Z_B es $I_1 - I_2$ si I_1 es mayor que I_2 o bien $I_2 - I_1$ en caso contrario (el sentido de circulación es el correspondiente a la mayor intensidad de las dos mallas contiguas). La caída de tensión en un elemento cualquiera del circuito es el producto de la impedancia compleja del mismo por el fasor intensidad de corriente que lo atraviesa (el borne del elemento por donde entra la flecha del sentido de la intensidad está a más tensión que por donde sale).

Vamos a obtener el sistema de ecuaciones del circuito de tres mallas independientes de la Fig. 9-1 aplicando a cada malla la segunda ley de Kirchhoff. En la Fig. 9-2 aparece la primera malla aislada y se ha de verificar que la suma de las fuerzas electromotrices o subidas de tensión es igual a la suma de las caídas de tensión.

$$Z_A I_1 + Z_B (I_1 - I_2) = V_A \quad (1)$$

La segunda malla no contiene fuente de tensión alguna; por tanto, la suma de las caídas de tensión a lo largo de ella es cero.

$$Z_C I_2 + Z_D (I_2 + I_3) + Z_B (I_2 - I_1) = 0 \quad (2)$$

Para la tercera malla tendremos,

$$Z_E I_3 + Z_D (I_3 + I_2) = V_B \quad (3)$$

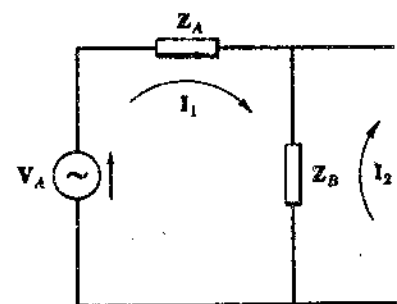


Fig. 9-2

Es decir,

$$(Z_A + Z_B)I_1 - Z_B I_2 = V_A \quad (1')$$

$$-Z_B I_1 + (Z_B + Z_C + Z_D)I_2 + Z_D I_3 = 0 \quad (2')$$

$$Z_D I_2 + (Z_D + Z_E)I_3 = V_B \quad (3')$$

Este sistema de ecuaciones se puede obtener directamente. Para ello, consideremos la primera malla, que aparece en la Fig. 9-2. La corriente I_1 tiene el sentido de las agujas del reloj y las caídas de tensión en todos los elementos de esta malla son todas positivas. Ahora bien, por Z_B también circula la corriente I_2 de la segunda malla, pero con sentido opuesto a I_1 . Por tanto, la caída de tensión en Z_B debida a I_2 es $-Z_B I_2$. La caída de tensión V_A es positiva por tener el mismo sentido que I_1 . En estas condiciones, aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la primera malla se obtiene la ecuación (1'). Análogamente, resultan las Ecuaciones (2') y (3').

Los términos *caída* y *subida* de tensión o potencial son más propios de los circuitos de corriente continua (c.c.) en los que su significado es más claro que en los de corriente alterna (c.a.), en donde los valores instantáneos de tensión y de intensidad de corriente son unas veces positivos y otras negativos. La segunda ley de Kirchhoff en régimen permanente senoidal aplicada a una malla o lazo cerrado dice: *La suma geométrica de los fasores de tensión de las fuentes activas de la malla es igual a la suma geométrica de los fasores de caídas de tensión en las impedancias de la malla.*

ELECCION DE LAS MALLAS

La solución de un circuito por el método de las corrientes de mallas se simplifica extraordinariamente eligiendo bien las mallas a considerar. Por ejemplo, supongamos que en el circuito de la Fig. 9-1 solo es necesario conocer la corriente que circula por la impedancia Z_B ; lo más cómodo será resolver el problema de forma que por Z_B no circule más que una corriente de malla, es decir, que dicha impedancia no pertenezca más que a una malla. En estas condiciones, solo habrá que determinar el valor de la corriente de malla I_1 . En la Fig. 9-3 se pueden observar las nuevas mallas elegidas.

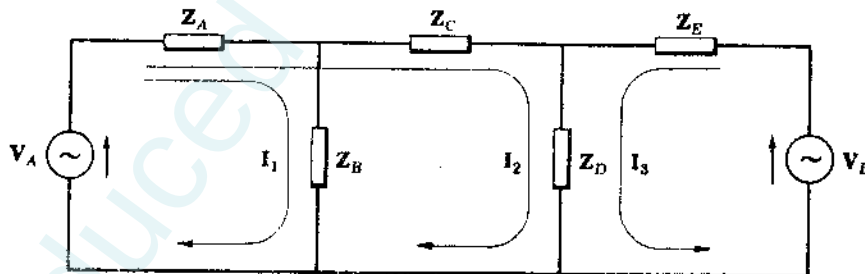


Fig. 9-3

El sistema de ecuaciones correspondiente a tal elección de mallas es

$$(Z_A + Z_B)I_1 + Z_B I_2 = V_A$$

$$Z_A I_1 + (Z_A + Z_C + Z_D)I_2 + Z_D I_3 = V_A$$

$$Z_D I_2 + (Z_D + Z_E)I_3 = V_B$$

En cualquier caso, por cada elemento del circuito debe circular al menos una corriente de malla y no tiene por qué haber dos ramas con la misma corriente o igual combinación algebraica de corrientes. En el párrafo siguiente vamos a ver el criterio que permite saber el número mínimo de mallas independientes para resolver un circuito. Si el número de mallas que se adoptan es menor que el necesario, el sistema de ecuaciones no es válido.

NUMERO MINIMO DE MALLAS INDEPENDIENTES

Si el circuito es plano y sencillo, el número de mallas necesario se deduce fácilmente a simple vista. Para circuitos más complejos es preciso tener algún criterio que proporcione el número de ecuaciones linealmente independiente, necesario para resolver el circuito en cuestión.

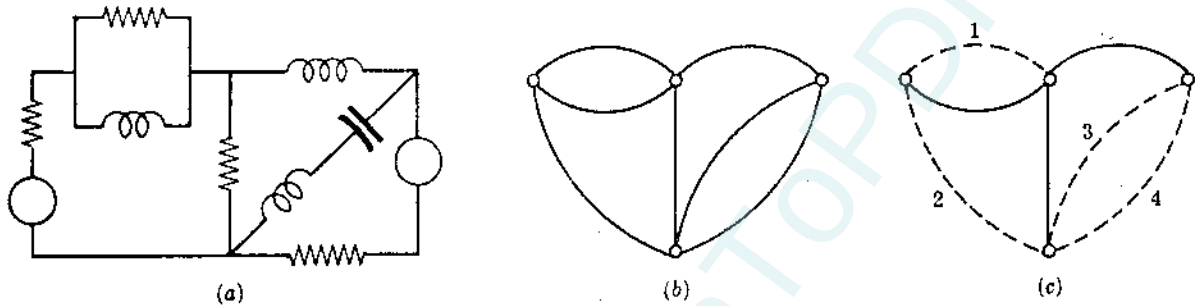


Fig. 9-4. Un circuito, su grafo y su árbol

En la Fig. 9-4(b) se representa el grafo del circuito que figura a su izquierda, (a); los nudos se han sustituido por círculos pequeños y las ramas por líneas. La Fig. 9-4(c) muestra un posible árbol del grafo que solo contiene ramas que no forman malla o lazo cerrado. Sin embargo, este árbol no es único. Las líneas de trazo continuo se llaman ramas del árbol y las de trazos, ramas de enlace. Cada una de las ramas de enlace forma una malla única con las ramas del árbol. El número de mallas necesario de un circuito es igual al número de ramas de enlace; en el ejemplo que consideramos, este número es cuatro.

Se llega al mismo resultado anterior haciendo unos cortes en las ramas del circuito de manera que cada uno de ellos abra una malla. Cuando no quede ninguna malla sin abrir, el número de cortes efectuados es el número de mallas independientes a considerar.

Otro criterio consiste en contar el número de ramas y el de nudos del circuito. El número de mallas o lo que es igual, el de ecuaciones del sistema es:

$$\text{número de ecuaciones} = \text{número de ramas} - (\text{número de nudos} - 1)$$

Por ejemplo, en el circuito de la Fig. 9-4(a) hay siete ramas y cuatro nudos. El número de mallas independientes es $7 - (4 - 1) = 4$, como ya hemos visto.

PLANTEAMIENTO DIRECTO DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE MALLAS

Las ecuaciones correspondientes a un circuito de tres mallas son, en notación general,

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 \pm Z_{12}I_2 \pm Z_{13}I_3 &= V_1 \\ \pm Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \pm Z_{23}I_3 &= V_2 \\ \pm Z_{31}I_1 \pm Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3 &= V_3 \end{aligned}$$

El coeficiente Z_{11} se llama impedancia propia de la malla uno y es la suma de todas las impedancias del lazo por las que circula la corriente de intensidad I_1 . Los coeficientes Z_{22} y Z_{33} son las impedancias de las mallas dos y tres, respectivamente.

El coeficiente Z_{12} se llama copedancia de las mallas uno y dos y es la suma de las impedancias comunes a los dos lazos, uno y dos, por los que circulan las corrientes de intensidades I_1 e I_2 , respectivamente. Es evidente que $Z_{12} = Z_{21}$. Los coeficientes $Z_{13} = Z_{31}$, $Z_{23} = Z_{32}$ son, análoga y respectivamente, las copedancias de las mallas uno y tres, y dos y tres. El signo de las copedancias es positivo o negativo, según que las dos corrientes de malla sean del mismo sentido o de sentidos contrarios.

El término independiente V_1 es la suma algebraica de las tensiones de las fuentes de la malla uno. Cada tensión de fuente se considera con un signo que es positivo si el sentido de la corriente que produce, del polo negativo al positivo, coincide con el de la corriente de malla, y negativo en caso contrario. Los términos independientes V_2 y V_3 son las sumas algebraicas de las tensiones de las fuentes de las mallas dos y tres, respectivamente.

Ejemplo 1.

Escribir el sistema de ecuaciones en las corrientes de malla del circuito representado en la Figura 9-5.

En el esquema del propio circuito se han señalado las corrientes de malla a considerar. Como en la malla uno no existen fuentes de tensión, el término independiente de la primera ecuación del sistema es cero

$$I_1(-j8) + (I_1 - I_2)10 + (I_1 - I_3)5 = 0$$

La fuente $5/30^\circ$ de la malla dos hace circular una corriente de sentido contrario a la cíclica de su malla, razón por la cual se ha de considerar con signo menos.

$$I_2(j4) + (I_2 - I_3)8 + (I_2 - I_1)10 = -(5/30^\circ)$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la tercera malla se deduce

$$I_3(3 + j4) + (I_3 - I_1)5 + (I_3 - I_2)8 = -(10/0^\circ)$$

Agrupando términos resulta el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} (15 - j8)I_1 - 10I_2 - 5I_3 &= 0 \\ -10I_1 + (18 + j4)I_2 - 8I_3 &= -(5/30^\circ) \\ -5I_1 - 8I_2 + (16 + j4)I_3 &= -(10/0^\circ) \end{aligned}$$

Comparemos este sistema de ecuaciones del circuito dado con el del circuito de tres mallas general. La impedancia de la malla uno es $Z_{11} = (5 + 10 - j8) = 15 - j8$. La copedancia de las mallas uno y dos es $Z_{12} = Z_{21} = 10$; ahora bien, como I_2 e I_1 son de sentido contrario circulando por la misma impedancia, Z_{12} lleva signo menos. Análogamente, la copedancia $Z_{13} = -5$. Obsérvese que $Z_{12} = Z_{21}$, $Z_{13} = Z_{31}$ y $Z_{23} = Z_{32}$.

La fuente de tensión de la malla dos es $5/30^\circ$ y lleva un signo menos porque hace circular una corriente de sentido opuesto a la de malla correspondiente, como ya indicamos. Cada término del sistema de ecuaciones obtenido tiene su imagen en el sistema más general.

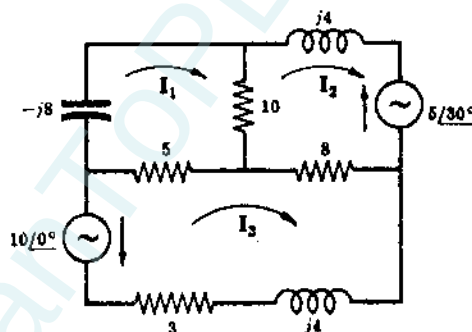


Fig. 9-5

MATRICES

Una matriz es una disposición ordenada de entes (números, funciones, etc.) en filas y columnas, encerrada entre corchetes, y que obedece a ciertas reglas o álgebra. En la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

los números a_{ij} se llaman elementos de la misma. El elemento a_{ij} pertenece a la fila i y a la columna j . Esta matriz consta de m filas y n columnas y, por ello, es de orden « $m \times n$ » y se llama «matriz A », o «matriz A $m \times n$ », o bien «matriz $m \times n$ [a_{ij}]».

La condición necesaria y suficiente para que dos matrices sean iguales es que tengan idénticos sus elementos correspondientes; es decir, una matriz ha de ser copia exacta de la otra para que sean iguales.

SUMA ALGEBRAICA DE MATRICES

Dos matrices del mismo orden se pueden sumar o restar, es decir, son conformes respecto de la suma algebraica.

La suma (resta) de dos matrices $m \times n$, $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ es otra matriz C cuyos elementos son la suma (resta) de los correspondientes de A y B . Por tanto, $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$.

Ejemplo 2. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, la suma

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+6 & 4+2 & 0+6 \\ 2+0 & 7+1 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} \text{ y la diferencia } A - B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

MULTIPLICACION DE MATRICES

El producto AB , en este sentido, de una matriz $A = [a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1m}]$ de orden $1 \times m$,

por otra matriz $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \dots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$ de orden $m \times 1$, es otra matriz C de orden 1×1 :

$$C = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1m}] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \dots \\ b_{m1} \end{bmatrix} = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1m}b_{m1}] = \left[\sum_{k=1}^m a_{1k} b_{k1} \right]$$

Obsérvese que cada elemento de la fila se ha multiplicado por el correspondiente de la columna sumando a continuación los productos obtenidos. El producto de matrices se hace siempre multiplicando filas por columnas.

Ejemplo 3. $[1 \ 3 \ 5] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = [1(2) + 3(4) + 5(-2)] = [4]$

El producto AB , en este sentido, de una matriz $A = [a_{ij}]$ de orden $m \times s$, por otra matriz $B = [b_{ij}]$ de orden $s \times n$, es otra matriz $C = [c_{ij}]$ de orden $m \times n$, siendo

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Ejemplo 4. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$

Ejemplo 5. $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3I_1 + 5I_2 - 8I_3 \\ 2I_1 + 1I_2 + 6I_3 \\ 4I_1 - 6I_2 + 7I_3 \end{bmatrix}$

Ejemplo 6. $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(8) + (-3)(7) & 5(-2) + (-3)(0) & 5(6) + (-3)(9) \\ 4(8) + 2(7) & 4(-2) + 2(0) & 4(6) + 2(9) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 19 & -10 & 3 \\ 46 & -8 & 42 \end{bmatrix}$$

Las matrices anteriores A y B se llaman conformes respecto del producto, es decir, para que exista el producto AB es imprescindible que el número de filas de B sea igual al de columnas de A . Por consiguiente, si A es una matriz 3×2 y B es una matriz 2×5 existe el producto AB , pero no existe BA . Análogamente, si D es una matriz 3×3 y E es 3×3 existen ambos productos, AB y BA .

INVERSION

En una ordenación cualquiera de números naturales existe una inversión cuando un número precede a otro menor que él.

Por ejemplo, en la ordenación 132, el 3 precede al 2; por tanto, existe una inversión. En 321, el 3 precede al 2 y al 1, y el 2 precede al 1; hay, pues tres inversiones. En 4213, el 4 precede al 2, al 1 y al 3, y el 2 precede al 1; la ordenación tiene 4 inversiones. En 3421, el 3 precede al 2 y al 1, el 4 precede al 2 y al 1 y el 2 precede al 1; la ordenación tiene 5 inversiones.

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

Consideremos una matriz cuadrada de orden n ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

y formemos todos los productos de la forma $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n}$, de manera que solo exista en ellos un elemento de cada fila y otro de cada columna. Obsérvese que el orden del primer subíndice es, por conveniencia, $1, 2, \dots, n$, razón por la cual el orden $j_1, j_2, \dots, j_n$ del segundo subíndice será una de las $n!$ permutaciones de los números $1, 2, \dots, n$. Además, asociemos un signo, $+$ o $-$, a cada producto, según que el número de inversiones de la permutación de los segundos subíndices sea par o impar, respectivamente.

En estas condiciones, el determinante de una matriz cuadrada A de orden n , que se escribe $|A|$, es el polinomio que resulta al sumar los $n!$ productos distintos, cada uno con su signo, que se pueden formar con los elementos de A .

El determinante de una matriz cuadrada de orden n se llama determinante de orden n .

Ejemplo 7.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejemplo 8.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

MENOR COMPLEMENTARIO Y ADJUNTO DE UN ELEMENTO

El menor complementario de un elemento a_{ij} de un determinante de orden n es el determinante de orden $(n - 1)$, que se obtiene suprimiendo la fila y la columna a que pertenece dicho elemento. El menor complementario de un elemento a_{ij} lo escribiremos en la forma $|M_{ij}|$.

El menor complementario con su signo, $(-1)^{i+j}|M_{ij}|$, se llama adjunto de a_{ij} y se escribe Δ_{ij} .

Ejemplo 9.

En el determinante de tercer orden $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

$$|M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA LINEA

El valor de un determinante $|A|$ de orden n es la suma algebraica de los n productos que se obtienen multiplicando cada elemento de una línea (fila o columna) cualquiera por su adjunto correspondiente. Es decir,

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32} \\ &= -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

es el desarrollo de $|A|$ por los elementos de la segunda columna.

Ejemplo 10.
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & -6 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\{4(-6) - 7(1)\} - 5\{1(-6) - 7(2)\} + 0 = 7$$

Ejemplo 11.
$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5\{1(3) - 2(4)\} = 25$$

Ejemplo 12.
$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = 5\{4(-3) - (-2)(8)\} = 20$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1. Si un determinante tiene dos líneas iguales es nulo. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & -4 \\ 6 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

2. Multiplicando los elementos de una línea por un número k , el determinante queda multiplicado por k . Por ejemplo,

$$2 \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 14 \end{vmatrix}$$

3. Permutando dos líneas de un determinante, éste cambia de signo. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & 8 \\ -6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

4. Si cada elemento de una línea es suma de dos o más números, el determinante se puede expresar mediante la suma de dos u más determinantes. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -9+2 & 5 \\ 2 & 4+0 & -5 \\ 1 & 8-2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -9 & 5 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & 8 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

5. Si a los elementos de una línea se le añaden los de otra multiplicados por una constante k , el valor del determinante no varía. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9+3(-3) & -3 \\ 4 & 6+3(-2) & -2 \\ -3 & 1+3(5) & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 16 & 5 \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES POR DETERMINANTES: REGLA DE CRAMER

El sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas x_1, x_2, x_3 ,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = k_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = k_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = k_3$$

se puede escribir en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

Si multiplicamos cada elemento de la primera columna por x_1 , el valor numérico del determinante de los coeficientes Δ_a queda multiplicado por dicho x_1 (Propiedad 2).

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad x_1 \Delta_a = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Sumemos a cada elemento de la primera columna el elemento correspondiente de la segunda multiplicado por x_2 , y el de la tercera multiplicado por x_3 (Propiedad 5). Entonces,

$$x_1 \Delta_a = \begin{vmatrix} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) & a_{22} & a_{23} \\ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_a}$$

o bien

siempre que $\Delta_a \neq 0$. Análogamente.

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 & a_{13} \\ a_{21} & k_2 & a_{23} \\ a_{31} & k_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_a} \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \\ a_{31} & a_{32} & k_3 \end{vmatrix}}{\Delta_a}$$

Este método de resolución se llama *regla de Cramer* y se puede aplicar a cualquier sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas siempre que el determinante de los coeficientes sea distinto de cero.

APLICACION DEL ALGEBRA MATRICIAL AL ANÁLISIS DE CIRCUITOS

El sistema de ecuaciones de un circuito de tres mallas

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 \pm Z_{12}I_2 \pm Z_{13}I_3 &= V_1 \\ \pm Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \pm Z_{23}I_3 &= V_2 \\ \pm Z_{31}I_1 \pm Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3 &= V_3 \end{aligned}$$

se puede escribir en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & \pm Z_{12} & \pm Z_{13} \\ \pm Z_{21} & Z_{22} & \pm Z_{23} \\ \pm Z_{31} & \pm Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$[Z][I] = [V]$$

que constituye la expresión matricial de la ley de Ohm, siendo $[Z]$ la matriz de impedancias, $[I]$ la matriz de intensidades de corriente y $[V]$ la matriz de tensiones.

Las corrientes de malla I_1 , I_2 e I_3 vienen dadas por el cociente de dos determinantes:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & \pm Z_{12} & \pm Z_{13} \\ V_2 & Z_{22} & \pm Z_{23} \\ V_3 & \pm Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_z} \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & V_1 & \pm Z_{13} \\ \pm Z_{21} & V_2 & \pm Z_{23} \\ \pm Z_{31} & V_3 & Z_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_z} \quad I_3 = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \pm Z_{12} & V_1 \\ \pm Z_{21} & Z_{22} & V_2 \\ \pm Z_{31} & \pm Z_{32} & V_3 \end{vmatrix}}{\Delta_z}$$

Si se desarrollan los determinantes de los numeradores por los elementos de la columna de tensiones, resulta el conjunto de ecuaciones siguiente:

$$I_1 = V_1 \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_z} \right) + V_2 \left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_z} \right) + V_3 \left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_z} \right) \quad (1)$$

$$I_2 = V_1 \left(\frac{\Delta_{12}}{\Delta_z} \right) + V_2 \left(\frac{\Delta_{22}}{\Delta_z} \right) + V_3 \left(\frac{\Delta_{32}}{\Delta_z} \right) \quad (2)$$

$$I_3 = V_1 \left(\frac{\Delta_{13}}{\Delta_z} \right) + V_2 \left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta_z} \right) + V_3 \left(\frac{\Delta_{33}}{\Delta_z} \right) \quad (3)$$

Los segundos miembros de (1), (2) y (3) son las componentes fasoriales de las distintas fuentes de tensión. Esto es, en la Ecuación (1), la intensidad de corriente I_1 consta de tres términos: $V_1(\Delta_{11}/\Delta_z)$ debido a la fuente V_1 , $V_2(\Delta_{21}/\Delta_z)$ debido a la fuente V_2 y $V_3(\Delta_{31}/\Delta_z)$ debido a la fuente V_3 .

IMPEDANCIA DE ENTRADA

Consideremos un circuito de elementos pasivos con dos terminales, como indica la Fig. 9-6. Sea I_1 la intensidad de la corriente que resulta al aplicar una tensión V_1 . Como no existen otras fuentes en

el circuito, la ecuación de la corriente de malla I_1 es

$$I_1 = V_1 \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_z} \right) + (0) \left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_z} \right) + (0) \left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_z} \right) + \dots = V_1 \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_z} \right)$$

La *impedancia de entrada* es la relación entre la tensión aplicada V_1 y la intensidad de corriente I_1 a que da lugar. Es decir,

$$Z_{\text{entrada } 1} = V_1 / I_1 = \Delta_z / \Delta_{11}$$

La impedancia de entrada de un *circuito con elementos activos* se define como la impedancia que presenta en sus terminales de entrada cuando *todas sus fuentes de tensión están cortocircuitadas conservando, eso sí, su propia impedancia interna*. Por consiguiente, la relación Δ_z / Δ_{11} representa la impedancia de entrada tanto de un circuito activo como de uno *pasivo*.

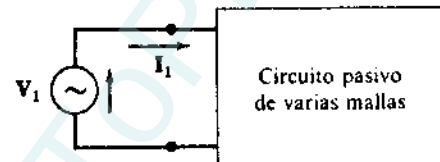


Fig. 9-6

IMPEDANCIA DE TRANSFERENCIA

Una fuente de tensión en una malla de un circuito produce una corriente en cada una de las otras mallas del mismo. La impedancia de transferencia es la relación entre la tensión aplicada en una malla y la intensidad de la corriente que resulta en otra malla, anulando el resto de las fuentes.

Consideremos el circuito de la Fig. 9-7 con una fuente de tensión V_r en la malla r y la intensidad I_s de la corriente a que da lugar en la malla s . Entonces,

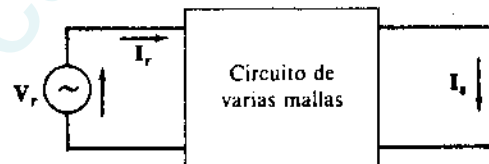


Fig. 9-7

$$I_s = (0) \left(\frac{\Delta_{1s}}{\Delta_z} \right) + \dots + V_r \left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta_z} \right) + \dots + (0) \left(\frac{\Delta_{ns}}{\Delta_z} \right) = V_r \left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta_z} \right)$$

con lo que

$$Z_{\text{transferencia } rs} = V_r / I_s = \Delta_z / \Delta_{rs}$$

El doble subíndice rs de esta impedancia indica el sentido de la acción, es decir, la fuente está en la malla r y la intensidad a considerar es la que aparece en la malla s . El determinante del denominador es el adjunto del elemento que ocupa el lugar rs , Δ_{rs} , con los mismos subíndices que la impedancia de transferencia.

Problemas resueltos

9-1 Dada la elección de corrientes de malla de la Fig. 9-8 escribir el sistema de ecuaciones correspondiente y expresarlo en forma matricial.

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a cada una de las mallas,

$$I_1(2 - j2) + (I_1 - I_2)(j5) + (I_1 - I_3)5 = 10 \angle 0^\circ$$

$$I_2(10) + (I_2 - I_3)(2 - j2) + (I_2 - I_1)(j5) = -(5 \angle 30^\circ)$$

$$I_3(10) + (I_3 - I_1)(5) + (I_3 - I_2)(2 - j2) = -(10 \angle 90^\circ)$$

Agrupando términos semejantes,

$$(7 + j3)I_1 - (j5)I_2 - (5)I_3 = 10 \angle 0^\circ$$

$$-(j5)I_1 + (12 + j3)I_2 - (2 - j2)I_3 = -(5 \angle 30^\circ)$$

$$-(5)I_1 - (2 - j2)I_2 + (17 - j2)I_3 = -(10 \angle 90^\circ)$$

que se puede expresar en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} 7 + j3 & -j5 & -5 \\ -j5 & 12 + j3 & -(2 - j2) \\ -5 & -(2 - j2) & 17 - j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/0^\circ \\ -(5/30^\circ) \\ -(10/90^\circ) \end{bmatrix}$$

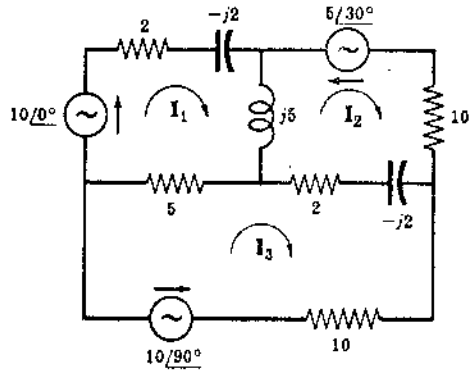


Fig. 9-8

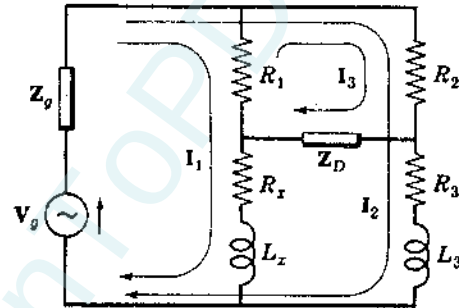


Fig. 9-9

- 9-2 Escribir directamente el sistema de ecuaciones en las corrientes de malla del circuito de la Fig. 9-9 y expresarlo en forma matricial.

Los elementos de la matriz de impedancias se deducen de sus definiciones. El elemento Z_{11} es la impedancia propia de la malla uno y es igual a la suma de todas las impedancias de dicha malla, $(R_1 + R_x + j\omega L_x + Z_g)$. El elemento Z_{12} es la copedancia o impedancia común a las mallas uno y dos y es igual a Z_g con signo positivo, ya que las dos corrientes circulan en el mismo sentido. La matriz de intensidades de corriente consta de los elementos I_1 , I_2 e I_3 . La matriz de tensiones está formada por las correspondientes a las fuentes en cada una de las mallas. Por consiguiente, el sistema de ecuaciones en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_x + j\omega L_x + Z_g) & Z_g & -R_1 \\ Z_g & (R_2 + R_3 + j\omega L_3 + Z_g) & R_2 \\ -R_1 & R_2 & (R_1 + R_2 + Z_D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g \\ V_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 9-3 Hallar la potencia suministrada por el generador de tensión del circuito de la Fig. 9-10. Calcular, asimismo, las potencias disipadas en las resistencias.

Elijamos las mallas de manera que por el generador circule una sola corriente. En estas condiciones,

$$\begin{bmatrix} 10 - j5 & j5 \\ j5 & 3 - j1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50/0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 50/0^\circ & j5 \\ 0 & 3 - j1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 - j5 & j5 \\ j5 & 3 - j1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{150 - j50}{50 - j25} = 2,83/8,14^\circ \end{aligned}$$

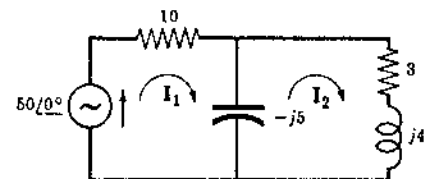


Fig. 9-10

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 10 - j5 & 50/0^\circ \\ j5 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_z} \\ &= \frac{-j250}{50 - j25} = 4,47/-63,4^\circ \end{aligned}$$

La potencia suministrada por la fuente es $P = VI \cos \theta = 50(2,83) \cos (8,14^\circ) = 140$ W. La potencia disipada en la resistencia de 10Ω es $P_{10} = 10(I_1)^2 = 10(2,83)^2 = 80$ W, y la potencia disipada en la resistencia de 3Ω es $P_3 = 3(I_2)^2 = 60$ W; la suma de ambas, $80 + 60 = 140$ W, es igual a la potencia suministrada por la fuente.

- 9-4 En el mismo circuito del Problema 9-3 se eligen las mallas como se indica en la Fig. 9-11. Hallar la potencia suministrada por el generador.

El sistema de ecuaciones de malla, en forma matricial, es

$$\begin{bmatrix} 10 - j5 & 10 \\ 10 & 13 + j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50/0^\circ \\ 50/0^\circ \end{bmatrix}$$

De aquí resulta:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50/0^\circ & 10 \\ 50/0^\circ & 13 + j4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 - j5 & 10 \\ 10 & 13 + j4 \end{vmatrix}} = \frac{150 + j200}{50 - j25} = 4,47/79,7^\circ$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 - j5 & 50/0^\circ \\ 10 & 50/0^\circ \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{-j250}{50 - j25} = 4,47/-63,4^\circ$$

Por la rama que contiene la fuente circulan dichas dos corrientes. Por tanto,

$$I_1 + I_2 = \left(\frac{150 + j200}{50 - j25} \right) + \left(\frac{-j250}{50 - j25} \right) = 2,83/+8,14^\circ$$

con lo que la potencia de la fuente es $P = VI \cos \theta = 50(2,83) \cos 8,14^\circ = 140 \text{ W}$.

- 9-5 En el circuito de la Fig. 9-12 se dan las tensiones compuestas, o entre líneas, de las tres fases de una red. Hallar las intensidades de corriente I_A , I_B e I_C .

Con las mallas elegidas las corrientes son independientes. Esto se pone de manifiesto en el sistema de ecuaciones escrito en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 10/30^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 10/30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 10/30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220/120^\circ \\ 220/0^\circ \\ 220/240^\circ \end{bmatrix}$$

de donde se obtienen las intensidades

$$I_1 = \frac{220/120^\circ}{10/30^\circ} = 22/90^\circ, \quad I_2 = \frac{220/0^\circ}{10/30^\circ} = 22/-30^\circ, \quad I_3 = \frac{220/240^\circ}{10/30^\circ} = 22/210^\circ$$

Por tanto,

$$I_A = I_1 - I_3 = (22/90^\circ - 22/210^\circ) = 38,1/60^\circ$$

$$I_B = I_2 - I_1 = (22/-30^\circ - 22/90^\circ) = 38,1/-60^\circ$$

$$I_C = I_3 - I_2 = (22/210^\circ - 22/-30^\circ) = 38,1/180^\circ$$

- 9-6 En el circuito de cuatro mallas representado en la Fig. 9-13 se eligen las mallas que aparecen en el esquema. Se ajusta la resistencia R y la capacidad de los dos condensadores iguales, C , de forma que la intensidad de corriente que circule por Z_D sea cero. En estas condiciones, expresar los valores de R_x y L_x en función de R , C y de la pulsación del generador ω en radianes por segundo.

El sistema de ecuaciones de malla, escrito en forma matricial, es

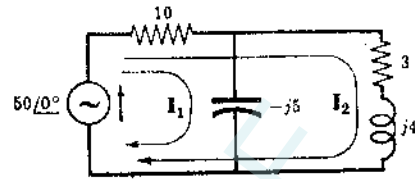


Fig. 9-11

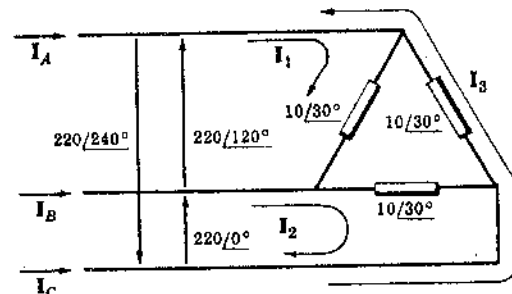


Fig. 9-12

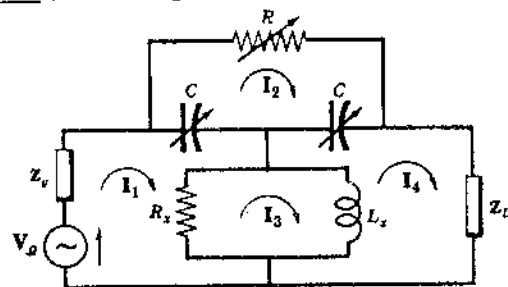


Fig. 9-13

$$\begin{bmatrix} \left(R_x + \frac{1}{j\omega C} + Z_g\right) & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -R_x & 0 \\ -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & \left(R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{j\omega C}\right) & 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) \\ -R_x & 0 & (R_x + j\omega L_x) & -(j\omega L_x) \\ 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -(j\omega L_x) & \left(\frac{1}{j\omega C} + j\omega L_x + Z_D\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Expresando la corriente I_4 que circula por Z_D en forma de determinante e igualando a cero,

$$I_4 = \frac{\begin{vmatrix} \left(R_x + \frac{1}{j\omega C} + Z_g\right) & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -R_x & V_g \\ -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & \left(R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{j\omega C}\right) & 0 & 0 \\ -R_x & 0 & (R_x + j\omega L_x) & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -(j\omega L_x) & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_x} = 0$$

Desarrollando el numerador por los elementos de la cuarta columna resulta

$$-V_g \begin{vmatrix} -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & \left(R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{j\omega C}\right) & 0 \\ -R_x & 0 & (R_x + j\omega L_x) \\ 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -(j\omega L_x) \end{vmatrix} = 0$$

Como este determinante debe ser cero,

$$-(-R_x)(R + 1/j\omega C + 1/j\omega C)(-j\omega L_x) - (-1/j\omega C)(-1/j\omega C)(R_x + j\omega L_x) = 0$$

de donde

$$R_x = 1/\omega^2 C^2 R \quad \text{y} \quad L_x = 1/2\omega^2 C$$

- 9-7 En el circuito de la Fig. 9-14 hallar los valores de las intensidades I_A , I_B e I_C .

Se eligen las dos mallas que se indican en el esquema. El sistema de ecuaciones correspondiente, escrito en forma matricial, es

$$\begin{bmatrix} 6 - j8 & -(3 - j4) \\ -(3 - j4) & 6 - j8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220/120^\circ \\ 220/0^\circ \end{bmatrix}$$

de donde

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 220/120^\circ & -(3 - j4) \\ 220/0^\circ & 6 - j8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 - j8 & -(3 - j4) \\ -(3 - j4) & 6 - j8 \end{vmatrix}} = \frac{2200/66.9^\circ + 1100/-53.1^\circ}{100/-106.2^\circ - 25/-106.2^\circ} = \frac{1905/36.4^\circ}{75/-106.2^\circ} = 25.4/143.1^\circ$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 - j8 & 220/120^\circ \\ -(3 - j4) & 220/0^\circ \end{vmatrix}}{\Delta_x} = \frac{2200/-53.1^\circ + 1100/66.9^\circ}{75/-106.2^\circ} = \frac{1905/-23.2^\circ}{75/-106.2^\circ} = 25.4/83^\circ$$

con lo que las intensidades de corriente por cada línea son $I_A = I_1 = 25.4/143.1^\circ$, $I_B = I_2 - I_1 = (25.4/83^\circ - 25.4/143.1^\circ) = 25.4/23.1^\circ$ e $I_C = -I_1 = 25.4/-143.1^\circ$

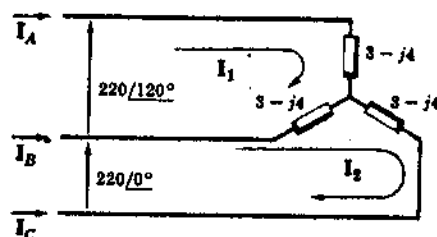


Fig. 9-14

- 9-8 Hallar la impedancia de entrada, vista desde la fuente de 50 voltios, del circuito de la Fig. 9-15 aplicando el cálculo matricial. Obtener, con esta impedancia, la intensidad de corriente I_1 .

La impedancia de entrada de la malla uno es

$$Z_{\text{entrada } 1} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -5 & 0 \\ -5 & 27 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 27 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{2000}{200} = 10$$

Por tanto, $I_1 = V_1/Z_{\text{entrada } 1} = 50/10 = 5 \text{ A}$.

- 9-9 En el circuito de la Fig. 9-15 hallar la intensidad de la corriente de malla I_3 mediante la impedancia de transferencia correspondiente.

La fuente se encuentra en la malla uno y la corriente I_3 es la que circula por la malla tres. Por tanto, la impedancia de transferencia que se necesita es

$$Z_{\text{transferencia } 13} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{13}} = \frac{2000}{\begin{vmatrix} -5 & 27 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{2000}{20} = 100$$

con lo que $I_3 = V_1/Z_{\text{transferencia } 13} = 50/100 = 0,5 \text{ A}$.

- 9-10 En el circuito de la Fig. 9-15 hallar la intensidad de la corriente de malla I_2 mediante la impedancia de transferencia correspondiente.

Como la fuente está en la malla uno y la corriente es la que circula por la malla dos, la impedancia de transferencia que se necesita es

$$Z_{\text{transferencia } 12} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{12}} = \frac{2000}{(-1) \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{2000}{40} = 50$$

con lo que $I_2 = V_1/Z_{\text{transferencia } 12} = 50/50 = 1 \text{ A}$.

- 9-11 Hallar las tensiones V_{AB} y V_{BC} en el circuito de la Figura 9-16.

El sistema de ecuaciones de malla, escrito en forma matricial, es

$$\begin{bmatrix} 3 + j14 & -j10 \\ -j10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100/\angle 45^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 100/\angle 45^\circ & -j10 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 + j14 & -j10 \\ -j10 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{0}{100} = 0, \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 + j14 & 100/\angle 45^\circ \\ -j10 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{1000/\angle 135^\circ}{100} = 10/\angle 135^\circ$$

Por tanto, $V_{AB} = I_1(3 + j4) = 0$ y $V_{BC} = I_2(-j10) = 10/\angle 135^\circ (10/\angle -90^\circ) = 100/\angle 45^\circ$. La suma ($V_{AB} + V_{BC}$) = $100/\angle 45^\circ$, que es el valor del fasor de tensión aplicado.

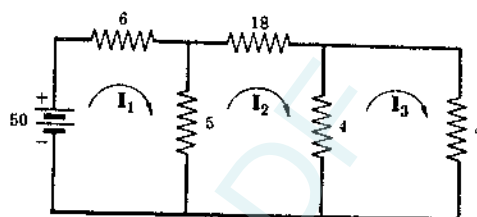


Fig. 9-15

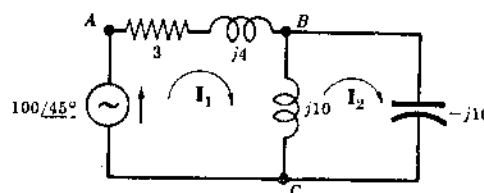


Fig. 9-16

- 9-12** En el circuito de la Fig. 9-17 obtener las tres componentes del triángulo de potencia correspondiente a la fuente $10\angle 30^\circ$ voltios.

Eligiendo las mallas que se indican en el esquema, por la rama que contiene el generador solo circula la corriente I_1 . Como no existe más que un generador en el circuito, se puede emplear la impedancia de entrada para el cálculo de I_1 .

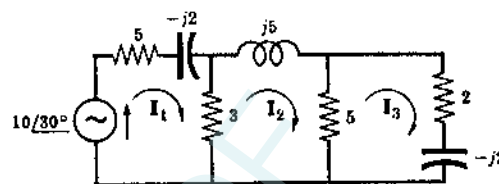


Fig. 9-17

$$Z_{\text{entrada } 1} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 8-j2 & -3 & 0 \\ -3 & 8+j5 & -5 \\ 0 & -5 & 7-j2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8+j5 & -5 \\ -5 & 7-j2 \end{vmatrix}} = \frac{315/16,2^\circ}{45,1/24,9^\circ} = 6,98/-8,7^\circ$$

con lo que $I_1 = V_1/Z_{\text{entrada } 1} = (10\angle 30^\circ)/(6,98/-8,7^\circ) = 1,43/38,7^\circ$

La potencia suministrada por la fuente es $P = V_1 I_1 \cos \theta = 10(1,43) \cos 8,7^\circ = 14,1$ W. La potencia reactiva es $Q = V_1 I_1 \sin 8,7^\circ = 2,16$ VAR en adelanto. La potencia aparente es $S = V_1 I_1 = 14,3$ VA.

- 9-13** En el circuito de la Fig. 9-17 hallar las intensidades de corriente I_2 e I_3 mediante las impedancias de transferencia.

Como el generador está en la malla uno y la corriente pedida circula por la malla dos hay que calcular la impedancia $Z_{\text{transferencia } 12}$.

$$Z_{\text{transferencia } 12} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{12}} = \frac{315/16,2^\circ}{(-1) \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 7-j2 \end{vmatrix}} = \frac{315/16,2^\circ}{21,8/-16^\circ} = 14,45/32,2^\circ$$

Por tanto, $I_2 = V_1/Z_{\text{transferencia } 12} = (10\angle 30^\circ)/(14,45/32,2^\circ) = 0,693/-2,2^\circ$

Análogamente,

$$Z_{\text{transferencia } 13} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{13}} = \frac{315/16,2^\circ}{\begin{vmatrix} -3 & 8+j5 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{315/16,2^\circ}{15} = 21/16,2^\circ$$

con lo que $I_3 = V_1/Z_{\text{transferencia } 13} = (10\angle 30^\circ)/(21/16,2^\circ) = 0,476/13,8^\circ$

- 9-14** En el circuito de la Fig. 9-17 hallar la potencia disipada en las resistencias y compararla con la potencia suministrada por el generador.

En los Problemas 9-12 y 9-13 se han obtenido: $I_1 = 1,43/38,7^\circ$, $I_2 = 0,693/-2,2^\circ$, $I_3 = 0,476/13,8^\circ$.

La potencia disipada en la resistencia de $5\ \Omega$ es $P = 5(I_1)^2 = 5(1,43)^2 = 10,2$ W. Por la resistencia de $3\ \Omega$ circulan dos corrientes de malla cuya diferencia es la corriente por la rama $(I_1 - I_2) = (1,115 + j0,895) - (0,693 - j0,027) = 0,422 + j0,922 = 1,01/65,4^\circ$; por tanto, $P = 3(1,01)^2 = 3,06$ W. Análogamente, la corriente que circula por la rama que contiene la resistencia de $5\ \Omega$ es $(I_2 - I_3) = (0,693 - j0,027) - (0,462 + j0,113) = (0,231 - j0,140) = 0,271/-31,2^\circ$, con lo que la potencia es $P = 5(0,271)^2 = 0,367$ W. La potencia en la resistencia de $2\ \Omega$ es $P = 2(I_3)^2 = 2(0,476)^2 = 0,453$ W.

La potencia total disipada en las resistencias del circuito es $P_T = 10,2 + 3,06 + 0,367 + 0,453 = 14,1$ W que coincide, precisamente, con la potencia activa del Problema 9-12.

- 9-15** En el circuito de la Fig. 9-18 el generador V_1 produce una caída de tensión V_0 voltios en la impedancia $2 - j2$ ohmios. Hallar el valor V_1 del generador que produzca una caída $V_0 = 5\angle 0^\circ$ voltios.

Con la tensión dada V_0 la corriente de malla es $I_3 = \frac{V_0}{2 - j2} = \frac{5\angle 0^\circ}{2\sqrt{2}/-45^\circ} = 1,76/45^\circ$ A. Su expresión como cociente de determinantes es

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 8 - j2 & -3 & V_1 \\ -3 & 8 + j5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} = V_1 \begin{bmatrix} -3 & 8 + j5 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = V_1 (0,0476 / -16,2^\circ)$$

$$\begin{bmatrix} 8 - j2 & -3 & 0 \\ -3 & 8 + j5 & -5 \\ 0 & -5 & 7 - j2 \end{bmatrix} = \frac{315 / 16,2^\circ}{}$$

Por tanto, $V_1 = \frac{I_3}{0,0476 / -16,2^\circ} = \frac{1,76 / 45^\circ}{0,0476 / -16,2^\circ} = 36,9 / 61,2^\circ$

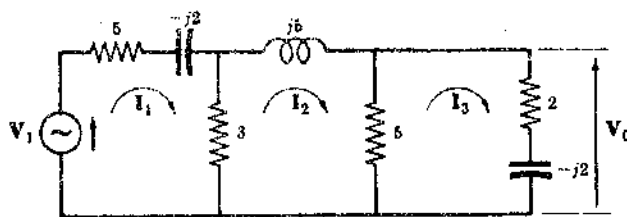


Fig. 9-18

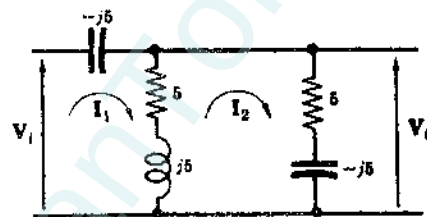


Fig. 9-19

- 9-16 Al conectar una impedancia de carga grande en el circuito de la Fig. 9-19 la tensión de salida V_0 corresponde a la caída de tensión en la impedancia $5 - j5$ ohmios. Obtener la función de transferencia de tensión V_0/V_i del circuito dado.

El sistema de ecuaciones de las dos mallas elegidas, escrito en forma matricial, es

$$\begin{bmatrix} 5 & -(5 + j5) \\ -(5 + j5) & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

La tensión de salida V_0 es

$$V_0 = I_2(5 - j5) = (5 - j5) \frac{\begin{vmatrix} 5 & V_i \\ -(5 + j5) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -(5 + j5) \\ -(5 + j5) & 10 \end{vmatrix}} = \frac{(5 - j5)(5 + j5)V_i}{(50 - j50)} = \frac{50V_i}{50\sqrt{2} / -45^\circ}$$

con lo que $\frac{V_0}{V_i} = \frac{50}{50\sqrt{2} / -45^\circ} = 0,707 / 45^\circ$

- 9-17 El circuito de la Fig. 9-20 contiene dos generadores de tensión. Hallar la intensidad de corriente que circula por la impedancia $2 + j3$ ohmios debida a cada una de las fuentes.

Se eligen las mallas de forma que la corriente que circule por la impedancia en cuestión sea, directamente, la corriente de malla I_2 . El sistema de ecuaciones del circuito, escrito en forma matricial, es

$$\begin{bmatrix} 5 + j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 8 + j8 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 / 0^\circ \\ 0 \\ -20 / 0^\circ \end{bmatrix}$$

El determinante de impedancias $\Delta_z = \begin{vmatrix} 5 + j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 8 + j8 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 70 + j620 = 624 / 83,55^\circ$

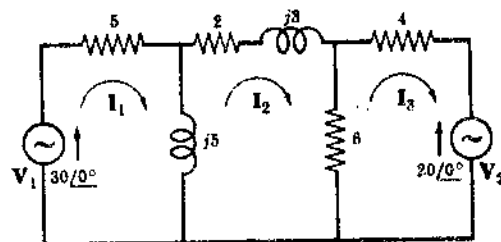


Fig. 9-20

Desarrollando el determinante del numerador de I_2 por los elementos de la segunda columna resulta

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & 30/0^\circ & 0 \\ -j5 & 0 & -6 \\ 0 & -20/0^\circ & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{30/0^\circ (-)}{\Delta_z} + 0 + (-20/0^\circ)(-) \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & 0 \\ -j5 & -6 \end{vmatrix}}{\Delta_z}$$

$$= -30/0^\circ \left(\frac{50/-90^\circ}{624/83,55^\circ} \right) + 20/0^\circ \left(\frac{42,4/-135^\circ}{624/83,55^\circ} \right) = 2,41/6,45^\circ + 1,36/141,45^\circ$$

La corriente que origina la fuente V_1 por la impedancia $2 + j3$ es $2,41/6,45^\circ$ y la que origina V_2 es $1,36/141,45^\circ$. La suma de estas dos intensidades es el valor de la corriente I_2 , es decir, $I_2 = 2,41/6,45^\circ + 1,36/141,45^\circ = 1,74/40,1^\circ$ A.

- 9-18** En el circuito de la Fig. 9-20 hallar (a) la potencia suministrada por cada generador y (b) la potencia disipada en las resistencias.

(a) La corriente que circula por la rama que contiene al generador V_1 es

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 30/0^\circ & -j5 & 0 \\ 0 & 8 + j8 & -6 \\ -20/0^\circ & -6 & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{2240/53,8^\circ}{624/83,55^\circ} = 3,59/-29,75^\circ$$

La potencia que suministra la fuente es $P_1 = V_1 I_1 \cos \theta = 30(3,59) \cos 29,75^\circ = 93,5$ W.

La intensidad de la corriente que circula por la rama que contiene V_2 es

$$I_4 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & -j5 & 30/0^\circ \\ -j5 & 8 + j8 & 0 \\ 0 & -6 & -20/0^\circ \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{860/-125,6^\circ}{624/83,55^\circ} = 1,38/-209,15^\circ$$

Obsérvese que V_2 e I_3 tienen sentidos opuestos. La potencia suministrada por V_2 es $P_2 = V_2(I_3) \cos \theta = (-)20(1,38) \cos -209,15^\circ = 24,1$ W.

La potencia total es $P_T = P_1 + P_2 = 93,5 + 24,1 = 117,6$ W.

- (b) La potencia disipada en la resistencia de 5Ω es $P_5 = 5(I_1)^2 = 5(3,59)^2 = 64,5$ W. En la resistencia de 2Ω , $P_2 = 2(I_2)^2 = 2(1,74)^2 = 6,05$ W. La corriente que circula por la rama que contiene la resistencia de 6Ω es $(I_2 - I_3) = (1,33 + j1,12) - (-1,205 + j0,672) = 2,535 + j0,45 = 2,57/10,1^\circ$; por tanto, $P_6 = 6(2,57)^2 = 39,6$ W. En la resistencia de 4Ω , $P_4 = 4(I_3)^2 = 4(1,38)^2 = 7,61$ W.

La potencia total es $P_T = 64,5 + 6,05 + 39,6 + 7,61 = 117,76$ W.

- 9-19** El circuito de la Fig. 9-21 tiene dos generadores de tensión, V_1 y V_2 . Siendo $V_1 = 30/0^\circ$ voltios, hallar V_2 para que la intensidad de corriente por la impedancia $2 + j3$ ohmios sea nula.

Con las mallas elegidas, por la impedancia $2 + j3$ circulará una sola corriente. El sistema de ecuaciones correspondiente, escrito en forma matricial, es

$$\begin{bmatrix} 5 + j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 8 + j8 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30/0^\circ \\ 0 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

de donde

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & 30/0^\circ & 0 \\ -j5 & 0 & 6 \\ 0 & V_2 & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 0$$

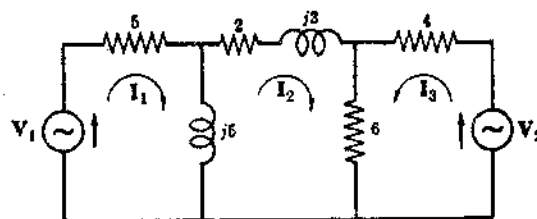


Fig. 9-21

Desarrollando
$$-30\angle 0^\circ \begin{vmatrix} -j5 & 6 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} - V_2 \begin{vmatrix} 5 + j5 & 0 \\ -j5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$-30\angle 0^\circ (50\angle -90^\circ) - V_2 (6)(5\sqrt{2}\angle 45^\circ) = 0$$

con lo que
$$V_2 = \frac{-30\angle 0^\circ (50\angle -90^\circ)}{6(5\sqrt{2}\angle 45^\circ)} = 35,4\angle 45^\circ$$

Otro método. Si no circula corriente por la impedancia $2 + j3$, $I_2 = 0$, y las caídas de tensión en la reactancia $j5$ y en la resistencia de 6Ω deben ser iguales, es decir,

$$I_1(j5) = I_3(6)$$

Sustituyendo $I_1 = 30\angle 0^\circ / (5 + j5)$ e $I_3 = V_2/10$,

$$\frac{30\angle 0^\circ}{5 + j5}(j5) = \frac{V_2}{10}(6) \quad \text{de donde} \quad V_2 = \frac{30\angle 90^\circ}{\sqrt{2}\angle 45^\circ} \left(\frac{10}{6}\right) = 35,4\angle 45^\circ$$

- 9-20** En el circuito de la Fig. 9-21 la tensión en bornes del generador es $V_2 = 20\angle 0^\circ$ voltios. Hallar el valor de la fuente de tensión V_1 para que la corriente que circule por la rama que contiene V_2 sea nula.

Mediante las mallas elegidas en el Problema 9-19 podemos escribir la expresión de I_3 e igualarla a cero:

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & -j5 & V_1 \\ -j5 & 8 + j8 & 0 \\ 0 & 6 & 20\angle 0^\circ \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 0$$

Desarrollando
$$V_1 \begin{vmatrix} -j5 & 8 + j8 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 20\angle 0^\circ \begin{vmatrix} 5 + j5 & -j5 \\ -j5 & 8 + j8 \end{vmatrix} = 0$$

$$V_1 (30\angle -90^\circ) + 20\angle 0^\circ (25 + j80) = 0$$

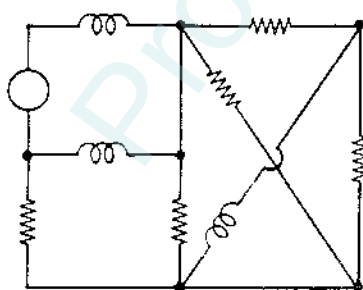
con lo que
$$V_1 = \frac{-20\angle 0^\circ (25 + j80)}{30\angle -90^\circ} = 55,8\angle -17,4^\circ$$

Problemas propuestos

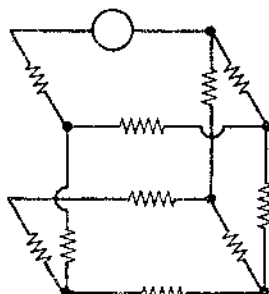
- 9-21** Determinar el número de mallas necesarias para poder resolver cada uno de los circuitos de la Fig. 9-22(a-f).

Emplear diferentes métodos para cada uno de ellos.

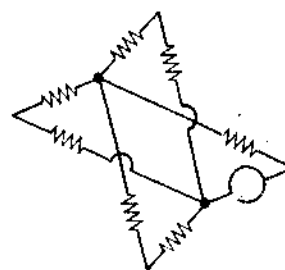
Sol. (a) 5, (b) 4, (c) 3, (d) 4, (e) 4, (f) 5.



(a)



(b)



(c)

Fig. 9-22

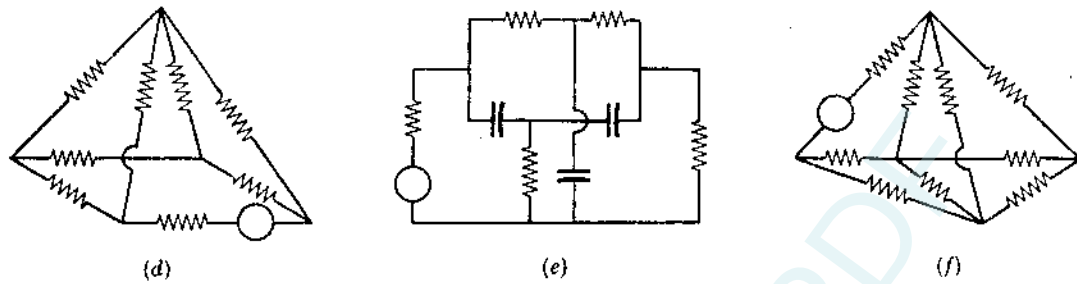


Fig. 9-22

- 9-22 En el circuito de la Fig. 9-23 hallar la intensidad de la corriente que circula por la resistencia de 3 ohmios. El sentido positivo de la corriente es el que se indica en el esquema. Sol. $4,47/-63,4^\circ$ A.

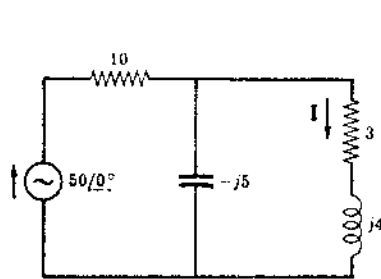


Fig. 9-23

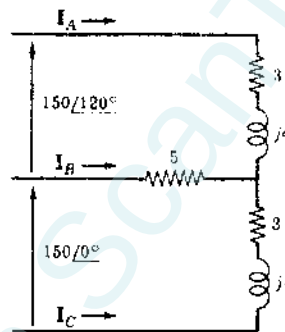


Fig. 9-24

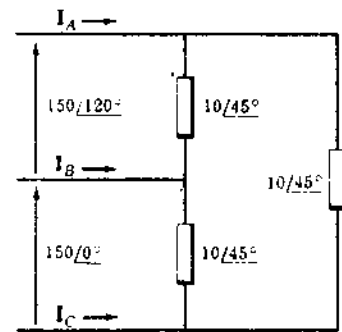


Fig. 9-25

- 9-23 En el circuito de la Fig. 9-24 hallar las intensidades de corriente I_A , I_B e I_C .
Sol. $I_A = 12,1/46,4^\circ$ A; $I_B = 19,1/-47,1^\circ$ A; $I_C = 22,1/166,4^\circ$ A.

- 9-24 En el circuito de la Fig. 9-25 hallar las intensidades I_A , I_B e I_C . Sol. $26/45^\circ$ A; $26/-75^\circ$ A; $26/-195^\circ$ A.

- 9-25 En el circuito de la Fig. 9-26 hallar la tensión V_{AB} por el método de las corrientes de malla. Sol. $V_{AB} = 75,4/55,2^\circ$ V.

- 9-26 En el circuito de la Fig. 9-27 hallar la tensión eficaz de la fuente V para que la potencia disipada en la resistencia de 5 ohmios sea 100 vatios. Sol. 40,3 V.

- 9-27 Elegir unas mallas en el circuito de la Fig. 9-28 y hallar el valor del determinante de impedancias Δ_z . Elegir otras mallas y calcular de nuevo Δ_z . Sol. $61 - j15$.

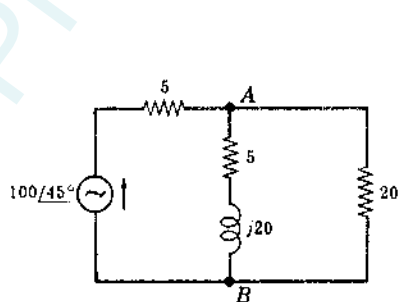


Fig. 9-26

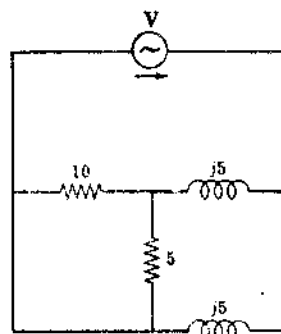


Fig. 9-27

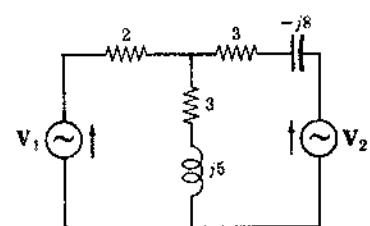


Fig. 9-28

- 9-28 En el circuito de la Fig. 9-28, $V_1 = V_2 = 50\angle 0^\circ$ voltios. Hallar la potencia suministrada por cada generador. Repetir el problema cambiando el sentido de la fuente V_2 .
 Sol. $P_1 = 191 \text{ W}$; $P_2 = 77,1 \text{ W}$; $P_1 = 327 \text{ W}$; $P_2 = 214 \text{ W}$.
- 9-29 En el circuito de dos mallas de la Fig. 9-29 hallar la potencia suministrada por el generador, así como la potencia disipada en cada una de las resistencias del mismo.
 Sol. $P = 36,7 \text{ W}$; $P_1 = 2,22 \text{ W}$; $P_2 = 27,8 \text{ W}$; $P_3 = 6,66 \text{ W}$.

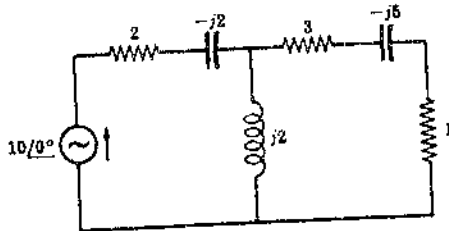


Fig. 9-29

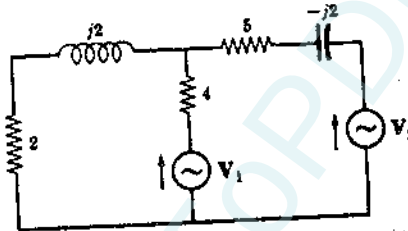


Fig. 9-30

- 9-30 En el circuito de la Fig. 9-30 los generadores V_1 y V_2 son $10\angle 90^\circ$ voltios y suministran una intensidad con el sentido que se indica en el esquema. Hallar la potencia que suministra cada generador.
 Sol. $P_1 = 11,0 \text{ W}$; $P_2 = 9,34 \text{ W}$.
- 9-31 En el circuito de la Fig. 9-31 hallar la intensidad de corriente que circula por la impedancia $3 + j4$ ohmios.
 Sol. 0.

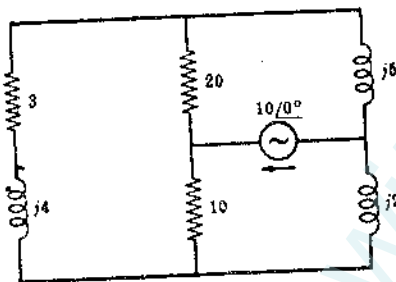


Fig. 9-31

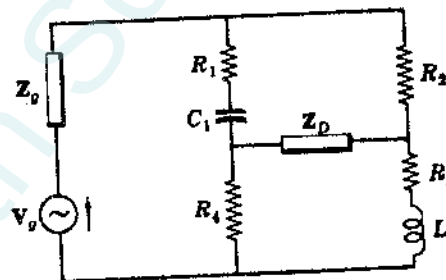


Fig. 9-32

- 9-32 El circuito de la Fig. 9-32 representa el puente de Hay. Elegir las mallas y escribir el sistema de ecuaciones en forma matricial. Expresar entonces la corriente que circula por Z_D en forma de determinante e igualarla a cero. Hallar los valores de R_x y L_x en función de las otras constantes del puente.

$$\text{Sol. } R_x = \frac{\omega^2 C_1^2 R_1 R_2 R_4}{1 + (\omega R_1 C_1)^2}, \quad L_x = \frac{C_1 R_2 R_4}{1 + (\omega R_1 C_1)^2}$$

- 9-33 El circuito de la Fig. 9-33 representa el puente de Owen. Hallar los valores de R_x y L_x en función de las otras constantes del puente cuando la corriente que circula por Z_D sea nula. Sol. $R_x = \frac{C_1}{C_4} R_2$, $L_x = C_1 R_2 R_4$

- 9-34 El circuito de la Fig. 9-34 es un puente de medida del coeficiente de autoinducción de una bobina. Elegir las mallas y escribir el sistema de ecuaciones en forma matricial. Hallar los valores de R_x y L_x cuando la corriente que circula por Z_D sea cero.

$$\text{Sol. } R_x = \frac{R_2}{R_1} R_4, \quad L_x = \frac{R_2}{R_1} L_4$$

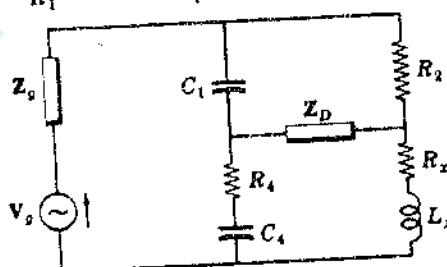


Fig. 9-33

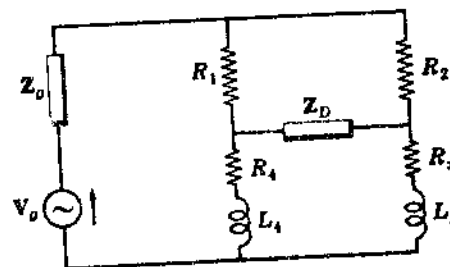


Fig. 9-34

- 9-35 Hallar la función de transferencia de tensión V_0/V_i en el circuito de la Figura 9-35. Sol. $0,139 \angle 90^\circ$.

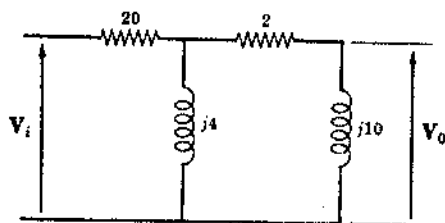


Fig. 9-35

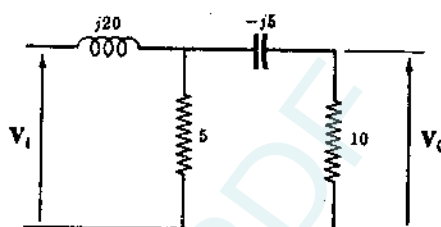


Fig. 9-36

- 9-39 Hallar la función de transferencia de tensión V_0/V_i en el circuito de la Figura 9-36. Sol. $0,159 \angle -61,4^\circ$.

- 9-37 En el circuito de la Fig. 9-37 hallar el valor de V_0 con el sentido de polarización que se indica. Sol. $1,56 \angle 128,7^\circ$ V.

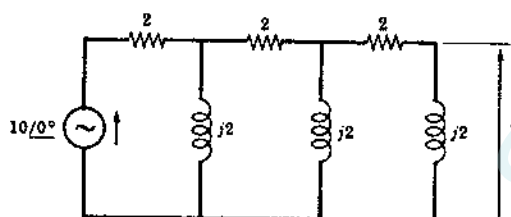


Fig. 9-37

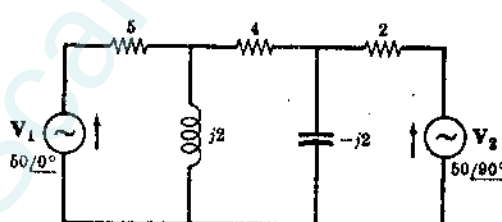


Fig. 9-38

- 9-38 En el circuito de la Fig. 9-38 hallar la potencia disipada en cada una de las tres resistencias.

Sol. 471 W; 47,1 W; 471 W.

- 9-39 En el circuito de la Fig. 9-38 hallar la potencia suministrada por cada uno de los generadores.

Sol. $P_1 = 422$ W; $P_2 = 565$ W.

- 9-40 En el circuito de la Fig. 9-39 hallar la intensidad de la corriente de malla I_3 con la elección de las mallas considerada. Sol. $1,38 \angle -209,15^\circ$ A.

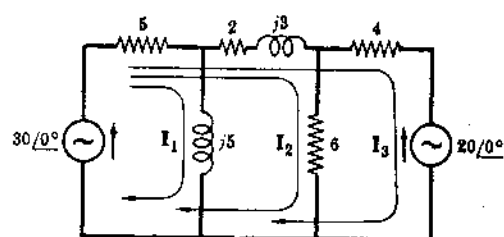


Fig. 9-39

- 9-41 Hallar la intensidad de corriente I_3 en el circuito de la Figura 9-40. Sol. $11,6 \angle 113,2^\circ$ A.

- 9-42 En el circuito de la Fig. 9-40 hallar la relación de intensidades I_1/I_3 . Sol. $-j3,3$.

- 9-43 En el circuito de la Fig. 9-41, con las tres corrientes de malla que se indican, hallar las impedancias $Z_{\text{transferencia } I_3}$ y $Z_{\text{transferencia } I_1}$. Sol. $4,3 \angle -68,2^\circ$ para los dos.

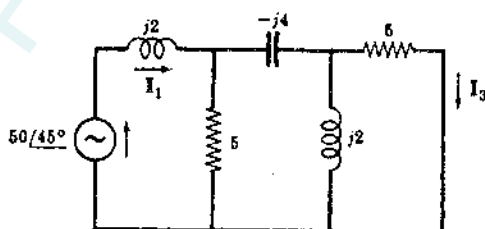


Fig. 9-40

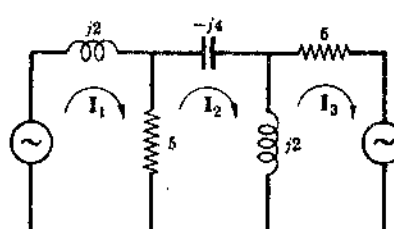


Fig. 9-41

- 9-44 En el circuito de la Fig. 9-42, y con las mallas que se indican, hallar las impedancias $Z_{\text{entrada } 1}$, $Z_{\text{transferencia } 12}$ y $Z_{\text{transferencia } 13}$. Sol. $20,2/-36,1^\circ$; $17,4/-71,6^\circ$; $6,82/-82,9^\circ$.

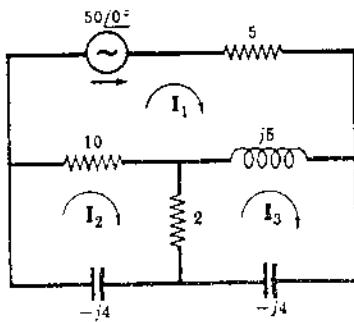


Fig. 9-42

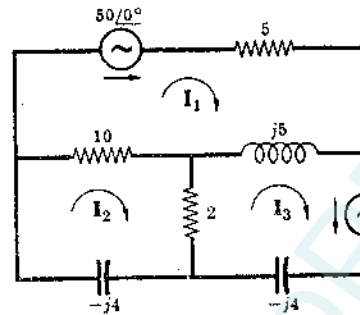


Fig. 9-43

- 9-45 En la Fig. 9-43 se añade el generador V_3 al circuito de la Fig. 9-42. Hallar el valor de V_3 de manera que la corriente de malla I_1 sea cero. Sol. $16,8/133,2^\circ$ V.
- 9-46 En la Fig. 9-44 se añade el generador V_2 al circuito de la Fig. 9-42. Hallar el valor de V_2 de manera que la corriente de malla I_1 sea nula. Sol. $42,9/144,5^\circ$ V.

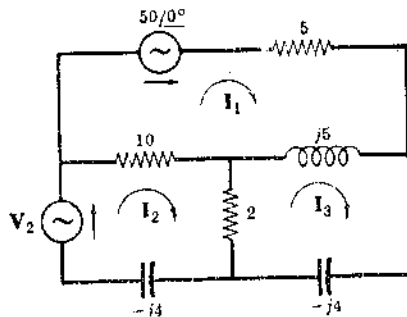


Fig. 9-44

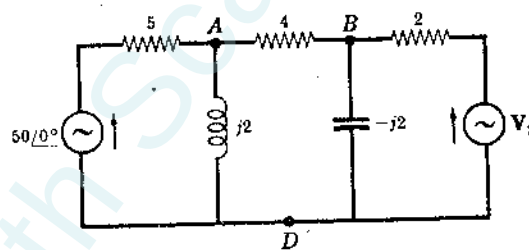


Fig. 9-45

- 9-47 En el circuito de la Fig. 9-45 hallar el valor de V_2 de manera que la intensidad de la corriente que circule por la resistencia de 4 ohmios sea nula. Sol. $26,3/113,2^\circ$.
- 9-48 En el circuito de la Fig. 9-45 hallar las tensiones V_{AD} y V_{BD} sabiendo que la tensión en bornes del generador es $V_2 = 26,3/113,2^\circ$ voltios. Sol. $V_{AD} = V_{BD} = 18,5/68,1^\circ$ V.
- 9-49 Hallar la impedancia $Z_{\text{transferencia } 13}$ con la elección de mallas que se indica en la Fig. 9-46. Calcular el valor de I_3 mediante esta impedancia de transferencia. Sol. $12,8/-38,7^\circ$; $0,782/38,7^\circ$.

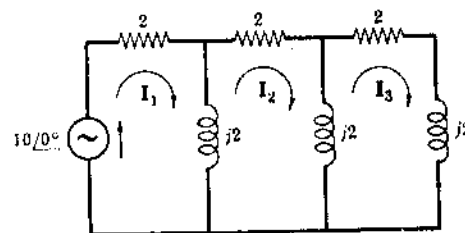


Fig. 9-46

- 9-50 En el circuito de la Fig. 9-47 calcular el valor de la tensión en bornes del generador V_2 para que la intensidad de corriente que circule por él sea nula. Sol. $V_2 = 4/180^\circ$ V.
- 9-51 Hallar el valor de tensión en bornes del generador V_1 de la Fig. 9-48 que produce una caída de tensión eficaz en la resistencia de 5 ohmios igual a 20 voltios. Sol. 69,1 V.

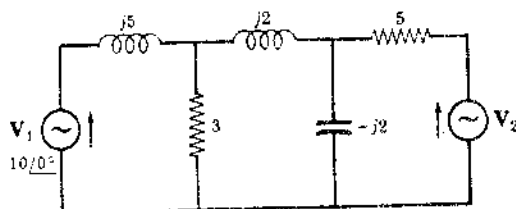


Fig. 9-47

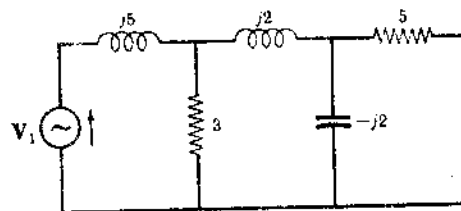


Fig. 9-48